Structures algébriques

1 Groupes

Définition 1.1

On appelle loi de composition interne sur un ensemble G toute application de $G \times G$ dans G.

Définition 1.2

*On dit que un ensemble G muni d'une loi interne $*$ est **un groupe** ssi :*
- *$*$ est associative : $\forall x, y, z, \in G$, $(x * y) * z = x * (y * z)$*
- *G admet un élément neutre pour $*$: $\exists e_G \in G, \forall x \in G$, $x * e_G = e_G * x = x$.*
- *Tout élément de G admet un symétrique pour $*$: $\forall x \in G, \exists y \in G, x * y = y * x = e_G$..*

On dit que $(G, *)$ est abélien (ou comuutatif) ssi $\forall x, y \in E$, $x * y = y * x$.

▶ **Remarque** : Unicité de l'élément neutre et du symétrique.

▶ **Différentes notations :**
- loi additive : 0, $-x$
- loi multiplicative : 1, x^{-1}.

▶ **Exemples** : $(U, \times)$, $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $(GL_n(\mathbb{K}), \circ)$.

Définition 1.3 (Sous-groupes)

*Soit $(G, *)$ un groupe et $H \subset G$. On dit que H est **un sous-groupe** de G ssi l'une des propositions équivalente est satisfaite :*

$$\begin{cases} \text{La loi est interne sur } H : \forall x, y \in H, \quad x * y \in H. \\ e \in H. \\ \forall x \in H, x^{-1} \in H. \end{cases} \iff \begin{cases} H \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in H^2, x * y^{-1} \in H. \end{cases}$$

▶ **Remarque :** Un sous-groupe est un groupe.

2 Anneaux

Définition 2.1

*Soit A un ensemble muni de deux lois internes $+$, $.$. On dit que A est **un anneau** ssi :*
- *$(A, +)$ est un groupe abélien.*
- *$.$ est associative et admet un élément neutre noté 1 ($\forall x \in A, 1.x = x.1 = x$).*
- *$.$ est distributive sur $+$.*
- *A admet un élément neutre pour $.$*

On dit que A est commutatif ssi $.$ est commutative.

▶ **Exemples :** $\big(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), +, \times\big)$, $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

Proposition 2.2 (Formule du binôme d Newton)

Soit $(A, +, .)$ un anneau et $(x, y) \in A^2$ tels que $xy = yx$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Proposition 2.3 (Formule de factorisation dans les anneaux)

Soit $(A, +, .)$ un anneau et $(x, y) \in A^2$ tels que $xy = yx$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

3 Algèbre

Définition 3.1

*Soit A un ensemble $\mathbb{K}$ un corps. On dit que A est **une algèbre** ssi :*
- *$(A, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev,*
- *$(A, +, \times)$ est un anneau communtatif.*
- *$\forall x, y \in A$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$.*

▶ **Remarque** : Nous reverrons la notion d'espace vectoriel dans le prochain chapitre.

Définition 3.2

*Soit A une algèbre sur le corps $\mathbb{K}$ et $B \subset A$. On dit que B est **une sous- algèbre** de A ssi :*
- *$(B, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-sev,*
- *$\forall x, y \in B$, $x \times y \in B$ (la loi $\times$ est stable sur B.)*

► **Remarque :** Une sous-algèbre est une algèbre.

Exemples :
– $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4 Corps

Définition 4.1

Soit K un ensemble muni de deux lois internes $+$, $.$. On dit que K est ***un corps*** *ssi :*
– *$(K,+,.)$ est un anneau.*
– $0_K \neq 1_K$
– *Tout élément de $K \setminus \{0\}$ admet un symétrique pour la loi $.$*
On dit que K est commutatif ssi $.$ est commutative.

► Ex : $\mathbb{C}$ est un corps, $\big(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),+,\times\big)$ n'est pas un corps.

5 Applications

Définition 5.1

On appelle application la donnée deux deux ensembles E,F et $f : E \to F$.
On dit que f est ***injective*** *ssi $\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.*
On dit que f est ***surjective*** *ssi $\forall y \in F, \exists x \in E\ y = f(x)$.*
On dit que f est ***bijective*** *ssi elle est injective et surjective.*