

# Les développements limités

## 1 Rappels

### Définition 1.1

Soit  $f$  définie sur  $I$ , à valeur dans  $F$  et soit  $a \in I$ . On dit que  $f$  admet un développement limité d'ordre 1 en  $a$  ssi :

$$\exists C_1, C_2 \in F, \forall x \in I, f(x) = C_1 + (x - a)C_2 + o_a(x - a).$$

### Proposition 1.2

$f$  est dérivable en  $a \iff f$  admet un  $DL_1$  en  $a$ . Dans ce cas,  $f(x) \underset{a}{=} f(a) + (x - a)f'(a) + o_a(x - a)$

### Définition 1.3

Soit  $f$  définie sur  $I$ , à valeur dans  $F$  et soit  $a \in I$ . On dit que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $a$  ssi :

$$\exists C_0 \dots C_n \in F, \forall x \in I, f(x) = C_0 + (x - a)C_1 + \dots + (x - a)^n C_n + o_a((x - a)^n)$$

### Théorème 1.4 ( Formule de Taylor-Young)

Si  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $[a, b]$  alors pour  $x \in [a, b]$  :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + (x - a)Df(a) + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!} D^{(n)}f(a) + o_a((x - a)^n)$$

### Théorème 1.5 ( Intégration des DL)

Soient  $f \in C([a, b], F)$  et  $g$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . Si  $f$  admet le  $DL_n$  en  $a$  :  $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^n (x - a)^k C_k + o_a((x - a)^n)$ , alors pour  $x \in [a, b]$  :

$$g(x) \underset{a}{=} g(a) + \sum_{k=0}^n \frac{(x - a)^{k+1}}{k + 1} C_k + o_a((x - a)^{n+1})$$

## Les développements limités usuels en 0

1.  $\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$ .
2.  $\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$ .
3.  $e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
4.  $\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n})$ .
5.  $\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ .
6.  $\arctan(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$ .
7.  $\operatorname{ch}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n})$ .
8.  $\operatorname{sh}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ .
9.  $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

## 2 En pratique

### 2.1 Addition de deux développements limités

Pour additionner deux développements limités, ils doivent être impérativement **au même ordre**. Si ce n'est pas cas, on tronque le développement limité du plus grand ordre à celui du plus petit ordre.

Exemples :

1.  $(1+x+x^3+o(x^3)) + (1+x^2+x^4+o(x^4)) =$

2. Déterminer le développement limité de  $e^x + \sin(x)$  au voisinage de zéro à l'ordre 4.

### 2.2 Produit de développements limités

Pour multiplier deux développements limités, ils doivent être impérativement **au même ordre**. Si ce n'est pas cas, on tronque le développement limité du plus grand ordre à celui du plus petit ordre. Le développement limité obtenu est à l'ordre des deux développements limités initiaux (après troncature si nécessaire), attention l'ordre du développement limité n'augmente pas avec un produit !!!

Exemples :

1. Déterminer le développement limité de  $\ln(1+x) \times \frac{1}{1+x}$  au voisinage de zéro à l'ordre 4.

2. Déterminer le développement limité de  $\ln(1+x)^2$  au voisinage de zéro à l'ordre 4.

### 2.3 Quotient de développements limités

Pour obtenir le développement limité d'un quotient, on utilise le développement limité de  $\frac{1}{1-x}$  (ou de  $\frac{1}{1+x}$ ).

Exemples :

1. Déterminer le développement limité de  $\frac{1}{\cos x}$  au voisinage de 0 à l'ordre 3.

2. En déduire le développement limité de  $\tan(x)$  au voisinage de 0 à l'ordre 3.

3. Déterminer le développement limité de  $\frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$  au voisinage de 0 à l'ordre 2.

## 2.4 Composition de développement limité

Exemples :

1. Déterminer le développement limité de  $e^{\sin x}$  au voisinage de 0 à l'ordre 3.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
2. Déterminer le développement limité de  $\ln(x^2 + 2x + 2)$  au voisinage de 0 à l'ordre 3.

## 2.5 Un développement limité en un autre point que 0

Pour déterminer un développement limité d'une fonction en un autre point que 0 par exemple  $a$ , on écrit la variable  $x = a + t$  et lorsque  $x$  est au voisinage de  $a$  est au voisinage de zéro. On fait alors le développement limité par rapport à  $t$  au voisinage de zéro, en utilisant les développements limités connus, puis on revient à la variable  $x$  en remarquant que  $t = x - a$ .

Exemples :

1. Déterminer le développement limité de  $\frac{1}{1+x}$  à l'ordre 4 au voisinage de 2.

2. Déterminer le développement limité de  $\frac{\ln(x)}{x+1}$  à l'ordre 4 au voisinage de 1.