Séries de Fourier

1 Généralités

1.1 L'ensemble $\mathcal{CM}_{2\pi}$

Définition 1.1

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ inclus dans I ssi il une subdivision $\sigma = (a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [|0, n-1|]$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ est continue et f admet des limites finies en a_i^+ et a_{i+1}^-.
On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un segment $[a, b]$ inclus dans I ssi il une subdivision $\sigma = (a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [|0, n-1|]$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et f, f' admettent des limites finies en a_i^+ et a_{i+1}^-.

Remarque :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I. Alors pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$.

L'intégration par parties est aussi valable pour les fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux seulement.

Définition 1.2

On note $\mathcal{CM}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions 2π-périodiques continues par morceaux.
$(\mathcal{CM}_{2\pi}, +, \times, .)$ est une $\mathbb{C}$ algèbre.

Proposition 1.3

Pour $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ $\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$ pour tout a réel.

1.2 Coefficients de Fourier

Définition 1.4

Pour $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, on définit les coefficients réels de Fourier a_n et b_n par :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt}$$

On définit les coefficients complexes de Fourier c_n par :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt}$$

Proposition 1.5

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$.
- $\boxed{\textit{Si } f \textit{ est } \textbf{paire}, \forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt, \quad b_n(f) = 0 \quad \text{et} \quad c_n = c_{-n}}$
- $\boxed{\textit{Si } f \textit{ est } \textbf{impaire}, \forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0, \quad b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt \quad \text{et} \quad c_n = -c_{-n}}$

► Ces propriétés sont importantes car elles évitent des calculs longs et fastidieux.

► Il est très important d'interpréter ces formules comme provenant d'un produit scalaire, même si on a besoin en fait d'une hypothèse de continuité sur f pour que cela en soit un...

► Pour tout n de $\mathbb{N}$, les applications $f \mapsto a_n(f)$, $f \mapsto b_n(f)$ et $f \mapsto c_n(f)$ sont des formes $\mathbb{C}$-linéaires.

Proposition 1.6

Les coefficients de Fourier vérifient pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \qquad a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{et} \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$
$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad \text{et} \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

Les coefficients de $\overline{f} : t \mapsto \overline{f(t)}$, $f_- : t \mapsto f(-t)$, $f_T : t \mapsto f(a+t)$ vérifient : $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$, $c_n(f_-) = c_{-n}(f)$, $c_n(f_T) = e^{ina}c_n(f)$.

Proposition 1.7

Soit f une fonction 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f') = inc_n(f)}$$

► Soit $k \geqslant 1$. Soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$$

Théorème 1.8

Soit $\mathcal{F}$ l'application $f \in \mathcal{M}_{2\Pi} \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$.

$$\boxed{\textit{L'application } \mathcal{F} \textit{ est linéaire et } ||\mathcal{F}||_\infty \leqslant ||f||_1. \textit{ De plus : } \lim_{n\longrightarrow\pm\infty} c_n(f) = 0.}$$

Corollaire 1.9

Soient $k \geqslant 1$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^k_{2\pi}$, alors $c_n(f) \underset{n\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

Définition 1.10

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On définit la somme partielle $S_p(f)$ d'une série de Fourier d'ordre p :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, S_p(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p} \Big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\Big) = \sum_{n=0}^{p} c_n(f)e^{inx} + \sum_{p=1}^{n} c_{-n}(f)e^{-inx}.}$$

On dit qu'elle converge lorsqu'elle converge en tant que série de fonction.

2 Polynômes trigonométriques

2.1 Définition

Proposition 2.1

Soit $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques.
L'application $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$ est un produit scalaire. On note $||f||_2$ la norme associée.
La famille $(e_n = t \mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale pour ce produit scalaire et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \langle e_n, f\rangle$.

Proposition 2.2

Pour toute fonction f de $\mathcal{C}_{2\pi}$, f est bornée sur $\mathbb{R}$ et on a $||f||_1 \leqslant ||f||_2 \leqslant ||f||_\infty$.

Définition 2.3

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ engendre un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dont les éléments sont appelés les polynômes trigonométriques.

Proposition 2.4

Soit P une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. *P est un polynôme trigonométrique.*
2. *Il existe $(c_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$.*
3. *Il existe $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant n}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=}^{n} a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)$. avec $a_k + ib_k = c_k$ pour $k \geqslant 1$ et $\dfrac{a_0}{2} = c_0$.*

2.2 L'espace $\mathcal{D}_{2\pi}$

Définition 2.5

Pour $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, on associe une application $f_r \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ telle que, en tout point de discontinuité de f, on ait :

$$f_r(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ représentent les limites à droite et à gauche de f en x. La fonction f_r s'appelle la régularisée de f.

► f et f_r ont les mêmes coefficients de Fourier !

Définition 2.6

L'ensemble des fonctions de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ égale à leur régularisée est noté $\mathcal{D}_{2\pi}$. $\mathcal{C}_{2\pi}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}_{2\pi}$. Le produit scalaire $\langle f, g\rangle$ défini sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ reste un produit scalaire sur $\mathcal{D}_{2\pi}$.

► Nous étendons toutes les notations de norme et produit scalaire sur $\mathcal{CM}_{2\pi}$. Ces notations sont bien sûr abusives.

Théorème 2.7 (Théorème de Weierstrass trigonométrique)

Si $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$, alors il existe une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$: il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques tels que $||f - P_n||_{\infty,\mathbb{R}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3 Convergence en moyenne quadratique

Définition 3.1

On note $\mathcal{P}_p$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{2\pi}$ engendré par les fonctions e_n pour $|n| \leqslant p$.

Théorème 3.2 (Projection orthogonale)

La projection orthogonale d'un vecteur f de $\mathcal{D}_{2\pi}$ sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_p$ est la somme partielle $\mathcal{S}_p(f)$. Cette projection vérifie : $||f||_2^2 = ||\mathcal{S}_p(f)||_2^2 + ||f - \mathcal{S}_p(f)||_2^2$.

► $||f - \mathcal{S}_p(f)||_2^2$ représente la distance de f à $\mathcal{P}_p$ et l'on sait que $P \in \mathcal{P}_p \mapsto ||f - P||_2^2$ atteint son minimum en un seul point : $\mathcal{S}_p(f)$.

Théorème 3.3 (Inégalité de Bessel)

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |c_n(f)|^2$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |c_{-n}(f)|^2$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n(f)|^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |b_n(f)|^2$ convergent et :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{p} |c_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{p} |c_{-n}(f)|^2 = \left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) \leqslant ||f||_2^2$$

Théorème 3.4 (Convergence en moyenne quadratique)

Pour tout f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, $\lim\limits_{p\longrightarrow+\infty} S_p(f)=f$ dans $(\mathcal{C}_{2\pi},||.||_2)$. C'est-à-dire $\lim\limits_{p\longrightarrow+\infty} ||f-S_p(f)||_2=0$.
On dit que la série de Fourier de f converge en moyenne quadratique vers f.

Théorème 3.5 (Formule de Parseval)

Soit $f\in\mathcal{CM}_{2\pi}$,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n(f)|^2+\sum_{n=1}^{+\infty}|c_{-n}(f)|^2=\left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2)=||f||_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt}$$

Corollaire 3.6

L'application $\mathcal{F}:\begin{cases} \mathcal{D}_{2\pi} & \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}\end{cases}$ *est injective.*

4 Convergence ponctuelle

Proposition 4.1

Si $f\in\mathcal{C}_{2\pi}$ et si $\sum_{n\geqslant0}|c_n(f)|$ et $\sum_{n\geqslant1}|c_{-n}(f)|$ convergent alors :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(f)e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(f)e^{-inx}$$

et la convergence de chacune des séries est normale.

Théorème 4.2 (Théorème de convergence normale)

Soit $\underline{f\in\mathcal{C}_{2\pi}}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors $\sum\limits_{n\geqslant0}|c_n(f)|$ et $\sum\limits_{n\geqslant1}|c_{-n}(f)|$ convergent et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(f)e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(f)e^{-inx}=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx)\Big)$$

Théorème 4.3 (Théorème de Dirichlet)

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Pour tout x de $\mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge en x et :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-)) &= \sum_{n=0}^{\infty}c_n(f)e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(f)e^{-inx}\\ &= \frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx)\Big)\end{aligned}$$

► Ce théorème est un thm de convergence ponctuelle ! !

5 Cas des fonctions T-périodiques

Tous les résultats précédents se généralisent aux fonctions T-périodiques. On pose alors $\boxed{\omega=\frac{2\pi}{T}.}$

Les coefficients de Fourier seront définis par :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\quad c_n(f)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t,$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n(f)=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t,\quad b_n(f)=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t.$$

La somme d'ordre p de la série de Fourier de f sera alors :

$$\sum_{n=0}^{p}c_n(f)e^{in\omega x}+\sum_{n=1}^{p}c_{-n}(f)e^{-in\omega x}=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{p}\Big(a_n(f)\cos(n\omega x)+b_n(f)\sin(n\omega x)\Big)$$

La norme $||.||_2$ est alors

$$\forall f\in\mathcal{M}_T,\quad ||f||_2^2=\frac{1}{T}\int_0^T|f(t)|^2\,dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2\,dt.$$