Suites et séries de fonctions

Les fonctions sont des fonctions définies sur I intervalle, non réduit à un point, de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{K}$.

1 Convergence

1.1 Convergence d'une suite de fonctions

1.1.1 Convergence simple

Définition 1.1

On appelle suite de fonctions toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. On la notera $(f_n)_n$.

Définition 1.2

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur I** *ssi pour tout x de I fixé, la suite $(f_n(x))_n$ converge dans $\mathbb{K}$:* $\boxed{\text{S'il existe } f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K}) \text{ tel que : } \forall x \in I, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).}$

► **Exemples :**

1. $I = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$. Si $x \in [0,1[$, $\lim_n f_n(x) = 0$ et $\lim_n f_n(1) = 1$.
2. $I = \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$. $\lim_n f_n(0) = 0$ et $\lim_n f_n(x) = 1$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1.1.2 Convergence uniforme

Définition 1.3

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. On dit que (f_n) **converge uniformément sur** *I ssi*

$$\boxed{\text{il existe } f : I \to \mathbb{K} \text{ telle que : } \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.}$$

► Lorsque les fonctions considérées son bornées sur I,

$$\boxed{\text{Cette définition est équivalente à dire que } \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = ||f_n - f||_{\infty,I} \text{ tend vers zéro qd } n \text{ tend vers } +\infty.}$$

Proposition 1.4

$\boxed{\text{La convergence uniforme implique la convergence simple.}}$ *(la réciproque est fausse)*

► **Attention** pour prouver la convergence uniforme, vous devez d'abord déterminer f par la convergence simple et ensuite chercher une majoration de $|f_n(x) - f(x)|$ **indépendante de x, pour $x \in I$.**

Définition 1.5

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I ssi il existe une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ telle que quel que soit le segment J inclus dans I la suite des restrictions $(f_{n|J})$ converge uniformément vers $f_{|J}$.

► **Exemple** :

Si on reprend l'exemple avec $f_n(x) = x^n$: on fixe $a \in [0,1[$ alors $\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = a^n \longrightarrow 0$, donc $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de $[0,1[$.

Théorème 1.6 (Critère de Cauchy uniforme)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I. Elle converge uniformément sur I ssi elle vérifie le critère de Cauchy uniforme :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall p \geqslant n \geqslant n_0, \forall x \in I, \quad |f_p(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

1.2 Convergence d'une série de fonctions

1.2.1 Convergence simple

Définition 1.7

Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$. Soit la suite de fonctions S_n définie par : $\forall x \in I$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_i(x)$. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la **suite des sommes partielles**. *La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi notée $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ et s'appelle la* **série de fonctions** *associée aux $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

Définition 1.8

La série de fonctions **converge simplement** *ssi la suite des sommes partielles converge simplement. On note la somme de cette série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.*

1.2.2 Convergence uniforme

Définition 1.9

Une série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ de fonctions définies sur I est dite **uniformément convergente** *sur I (resp. uniformément convergente sur tout segment de I) ssi la suite des sommes partielles converge uniformément sur I (resp. uniformément convergente sur tout segment de I).*

Proposition 1.10

Une série de fonctions converge uniformément sur I ssi elle vérifie le critère de Cauchy uniforme : c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant n \geqslant n_0,\ ||S_p - S_n|| \leqslant \varepsilon.$$

En parcticulier lorsque la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors $||f_n||_\infty$ converge vers 0. Attention la réciproque est fausse bien sûr !!

Théorème 1.11 (Critère de convergence uniforme à l'aide des restes.)

Pour qu'une série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ soit uniformément convergente sur I (resp. uniformément convergente sur tout segment de I) il faut et il suffit qu'elle converge simplement sur I et que la suite des restes d'ordre n converge uniformément sur I (resp. sur tout segment de I) vers zéro (fonction nulle).

► **Exemple** : $I = [0,1]$ et $f_n : x \mapsto (-1)^n \dfrac{x^n}{n+1}$.

Pour tout $x \in [0,1]$ la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge d'après le critère des séries alternées. De plus dans cette situation, on dispose de la majoration :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+2} \leqslant \tfrac{1}{n+2}.$$

On a donc $||R_n||_{[0,1],\infty} \longrightarrow 0$ et donc la série converge uniformément sur $[0,1]$.

Proposition 1.12

Soit (f_n) une suite de fonctions bornées sur I qui converge uniformément vers f. Alors f est bornée sur I.

1.2.3 Convergence normale

Définition 1.13

Une série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ est dite **normalement convergente sur** *I ssi la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} ||f_n||_\infty$ est convergente.*

► Pour montrer la convergence normale, il suffit de trouver une suite α_n de réel > 0 tels que : $\sum \alpha_n$ converge et $||f_n||_\infty \leqslant \alpha_n$.

Théorème 1.14

La convergence normale implique la convergence uniforme.

► **Exemple :** Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ où $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $I =]-1,1[$.

Montrer qu'elle ne converge pas normalement sur I. La série converge t-elle normalement sur tout segment de I ?

2 Propriétes de la limite d'une suite de fonctions

2.1 Continuité

Les démonstrations ne sont pas exigibles des étudiants.

Théorème 2.1 (Continuité de la fonction limite)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f sur I. Si chaque f_n est continue en un point a de I, alors f est continue en a.

Corollaire 2.2

Soit (f_n) une suite de fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f sur I (ou sur tout sgment de I). Alors f est continue sur I.

► **Remarque :** Ce corollaire peut servir à montrer que la convergence d'une suite de fonctions (f_n) vers f n'est pas uniforme : en effet soit $f_n(x) = x^n$ chaque f_n est continue sur I et la fonction limite (simple) ne l'est pas. Il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme sur I.

Théorème 2.3 (Continuité d'une série de fonctions)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ continue en a (resp sur I) qui converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I), alors sa fonction somme $f : I \to \mathbb{K}$ est continue en a (resp. sur I).

► La convergence uniforme d'une suite de fonctions dérivables de (f_n) vers f n'implique pas la dérivabilité de f.

2.2 Limite et convergence uniforme

Théorème 2.4 (Théorème de la double limite)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f sur I. Soit a un point adhérent à I. si chaque (f_n) a une limite $l_n \in \mathbb{K}$ quand x tend vers a en restant dans I, la suite (l_n) a une limite $l \in \mathbb{K}$ et $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a en restant dans I. Autrement dit :

$$\lim_{x\to a}\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{x\to a} f_n(x)\big).$$

▶ **Remarque :** Ce théorème s'étend au cas où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in -\infty, +\infty$.

Théorème 2.5 (Théorème de la double limite, version série)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément sur I et f sa fonction somme.
Si a étant une borne de I ($a \in \bar{\mathbb{R}}$), chaque f_n admet une limite l_n quand x tend vers a dans I, alors

- *la série $\sum_{n\geqslant 0} l_n$ converge et*
- $\sum_{n=0}^{+\infty} l_n = \lim_{x\to a} f(x)$.

2.3 Intégrabilité sur un segment

Théorème 2.6 (Intervertion limite et intégrale sur un segment)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors f est continue sur $[a,b]$ et $\int_a^b f_n(t)\,dt \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt$.

▶ La démonstration est à connaitre.

Corollaire 2.7

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f sur tout segment de I. Pour $a \in I$, on définit $F_n : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$. La suite de fonctions (F_n) converge uniformément sur tout segment de I vers $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.

Proposition 2.8

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$.
Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I alors (f_n) converge en moyenne quadratique vers f.
Si $(f_n)_n$ converge en moyenne quadratique vers f, alors $(f_n)_n$ converge en moyenne vers f.

▶ Le théorème ne donne que des conditions suffisantes pour que $\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$.

Théorème 2.9 (Intervertion série et intégrale sur un segment)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ tq $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors f est continue sur $[a,b]$ et
$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$.

Théorème 2.10 (Théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies et continues sur I dans $\mathbb{C}$ telles que la suite convergence simplement vers f et telle qu'il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leqslant \varphi(x).$$

$$\textit{Alors : } \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,dt = \int_I f(t)\,dt.$$

2.4 Dérivabilité sur un intervalle

Théorème 2.11 (Dérivation de suites de fonctions)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $a \in I$.
Si
- *Pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,*
- *(f_n) converge simplement sur I vers f*
- *$(f_n')_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers g*

Alors
- *$(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers f.*
- *f est de classe $\mathcal{C}^1$.*
- *$f' = g$.*

Corollaire 2.12

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})$, $k \in \mathbb{N}^*$ (resp. $k = +\infty$) telle que :
- *Pour tout $j \in [|0, k-1|]$ (resp. $\forall j \in \mathbb{N}$), la suite $(f_n^{(j)})_n$ converge simplement sur I*
- *la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers g (resp. il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geqslant p$, le suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I)*

Alors la fonction $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I avec $f^{(k)} = g$ et chaque suite $(f_n^{(j)})_n$ pour $j \in [|0,k|]$ (resp. $\forall j \in \mathbb{N}$) converge uniformément sur tout segment de I vers $f^{(j)}$.

Théorème 2.13 (Dérivation des séries de fonctions termes à termes)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *une série d'application de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I.

Si
- $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge simplement sur* I
- *la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ *converge uniformément vers* $g \in CF(I,\mathbb{K})$ *sur tout segment de* I

Alors :
- *la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge uniformément vers* f *sur tout segment de* I ,
- f *est de classe* $\mathcal{C}^1$,
- $f' = g$.

Corollaire 2.14

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *une série de fonctions de classe* $\mathcal{C}^k$,$k \in \mathbb{N}^*$ *(resp.* $k = +\infty$*) sur* I *telle que :*
- *Pour tout* $j \in [|0, k-1|]$ *(resp.* $\forall j \in \mathbb{N}$*), la série* $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(j)}(a))$ *converge simplement sur* I.
- *la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ *converge uniformément sur tout segment de* I *vers* $g \in CF(I,\mathbb{K})$ *(resp. il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que pour tout* $k \geqslant p$*, la série* $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ *converge uniformément sur tout segment de* I*)*

Alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *(resp.* $\mathcal{C}^\infty$*) sur* I *vers* f *et chaque série* $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(j)}$ *pour* $j \in [|0, k|]$ *(resp.* $\forall j \in \mathbb{N}$*) converge uniformément sur tout segment de* I *vers* $f^{(j)}$.

3 Etude de suite ou séries de fonctions

3.1 Etude de la fonction ζ de Riemann

Considérons la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ où $f_n :]1,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{n^x}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]1,+\infty[, \quad f_n^{(k)} = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Pour tout k de $\mathbb{N}$, $\sum_{n\geqslant 1} f_n^{(k)}$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ car, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout x de $]1,+\infty[$:

$$n^{\frac{1+x}{2}} f_n^{(k)} = \frac{(-\lambda n)^k}{n^{\frac{x-1}{2}}} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0,$$

(règle de $n^\alpha u_n$).

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$ et tout segment $[a,b]$ inclus dans $]1,+\infty[$, $\sum_{n\geqslant 1} f_n^{(k)}$ converge normalement car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [a,b], \quad |f_n^{(k)}| \leqslant \frac{(\ln n)^k}{n^a} = |f_n^{(k)}(a)|.$$

Donc pour tout k de $\mathbb{N}^*$ et tout segment $[a,b]$ inclus dans $]1,+\infty[$, $\sum_{n\geqslant 1} f_n^{(k)}$ converge uniformément.

Donc ζ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]1,+\infty[, \quad \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Au passage on remarque que la fonction ζ est décroissante et convexe.

3.2 Plan sommaire pour une suite d'applications

Soit $(f_n)_n$ une suite d'application définies sur I.

- Chercher une limite simple lorsque cela est possible, sinon restreindre I.
- Regarder si la convergence peut être uniforme sur I ou tout segment inclus dans I.
- Si la convergence est uniforme, vous pouvez intervertir limite, intégration.
- Pour la dérivation, il faut établir la convergence simple de la suite et la convergence uniforme sur la série de fonctions dérivées !

$$\boxed{\text{CVU}} \Rightarrow \boxed{\text{CVU sur tout segment}} \Rightarrow \boxed{\text{CVS}}.$$

Attention, toutes les réciproques sont fausses !

Pour la continuité, sur un intervalle il suffit d'établir la convergence uniforme sur tout segment inclus dans I. Par contre, pour intervertir intégrale ou limite, il faut la convergence uniforme sur I.

Si $I =]0, +\infty[$, alors les segment de I sont tous inclus dans les intervalles de la forme $[a, +\infty[$. Si $I = \mathbb{R}$, les segment de I sont touts inclus dans les segments de la forme $[-a, a]$....

Ces remarques sont à dire lorsque vous utiliser une caractérisation sur tout segment de I !

3.3 Plan sommaire pour l'étude d'une séries d'applications

Il s'agit d'étudier sur un exemple donné, les convergence d'une série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n : X \to \mathbb{K}$. On peut proposer le plan suivant (qu'il sera parfois nécessaire de compléter) :

1. $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge-t-elle simplement ?
   - Si oui, continuez
   - Si non, remplacer Y par X, Y domaine de convergence de la série.
2. $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge-t-elle normalement sur X ou Y ?
   - Si oui, alors $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, simplement (fin de l'étude !)
   - Si non, on continue l'étude
3. Est-ce que $||f_n||_\infty \to 0$?
   - Si non, il n'y a pas convergence uniforme.
   - Si oui, regardez $||R_n||_\infty$, si cette suite tend vers zéro alors $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sinon, il n'y a pas convergence uniforme.

$$\boxed{\text{CVN}} \Rightarrow \boxed{\text{CVU}} \Rightarrow \boxed{\text{CVS}}.$$

$$\boxed{\text{CVN}} \Rightarrow \boxed{\text{CVN sur tout segment}} \Rightarrow \boxed{\text{CVU sur tout segment}} \Rightarrow \boxed{\text{CVS}}.$$

Attention, toutes les réciproques sont fausses !

Pour la continuité, sur un intervalle il suffit d'établir la convergence uniforme sur tout segment inclus dans I. Par contre, pour intervertir intégrale ou limite, il faut la convergence uniforme sur I.

Si $I =]0, +\infty[$, alors les segment de I sont tous inclus dans les intervalles de la forme $[a, +\infty[$. Si $I = \mathbb{R}$, les segment de I sont touts inclus dans les segments de la forme $[-a, a]$....

Ces remarques sont à dire lorsque vous utiliser une caractérisation sur tout segment de I !

4 Approximations de fonctions

4.1 Subdivision

Définition 4.1

On appelle subdivision du segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, toute suite finie strictement croissante $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de points de $[a, b]$ telle que $a_0 = a$ et $a_n = b$.

Définition 4.2

Soit $\sigma = (a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et $\sigma' = (b_i)_{0\leqslant i\leqslant m}$ deux subdivisions de $[a, b]$, σ est moins fine que σ' si tout point de σ est un point de σ' : on note $\sigma \subset \sigma'$.

► **Exemple :** Une subdivision à pas régulier $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour $k = 0..n$.

4.2 Fonctions continues par morceaux

Définition 4.3

Soit $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$ est dite CM sur $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on note $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$, s'il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]a_{k-1}, a_k[$ soit continue et prolongeable par continuité au segment $[a_{k-1}, a_k]$. Une telle subdivision est dite adaptée (ou subordonnée) à f.
$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est dite continue par morceaux sur I si elle l'est sur tout segment de I. On notera $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

Proposition 4.4

- *Si $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$, une subdivision subordonnée à f contient les points de discontinuité de f. Il y en a un nombre fini.*
- *Toute subdivision plus fine que σ de la définition est encore subordonnée à f.*
- *$\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ est une espace vectoriel et stable par produit.*

► **Exemple :** $x \mapsto E(x)$ est $\mathcal{CM}$ sur $\mathbb{R}$.

4.3 Fonctions en escalier

Définition 4.5

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est dite en escalier, on note $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, s'il existe un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, une subdivision $\sigma = (a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $[a, b]$ tels que :
- *pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ la restriction de f à l'intervalle ouvert $]a_k, a_{k-1}[$ soit constante,*
- *f est nulle en dehors de $[a, b]$.*

Une telle subdivision est dite subordonnée à f.

Proposition 4.6

- *Si* $f \in \mathcal{E}([a,b]\mathbb{K})$, *une subdivision subordonnée à* f *contient les points de discontinuité de* f. *Il y en a un nombre fini.*
- *Toute subdivision plus fine que* σ *de la définition est encore subordonnée à* f.
- $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ *est une espace vectoriel et stable par produit.*

4.4 Théorèmes d'approximations

Théorème 4.7

Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ *est limite uniforme sur* $[a,b]$ *d'une suites de fonctions en escalier.*

Théorème 4.8

Toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ *est limite uniforme sur* $[a,b]$ *d'une suites de fonctions en escalier.*

Théorème 4.9 (Théorème d'approximation de Weiertrass)

Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ *est limite uniforme sur* $[a,b]$ *d'une suite de fonctions polynômes.*

Définition 4.10

On appelle fonction polynôme trigonométrique toute fonction de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *qui est combinaison linéaire des fonctions* $e_k : t \mapsto e^{ikt}$, *avec* k *un entier relatif.*

Théorème 4.11 (Théorème de Weierstrass trigonométrique)

Toute fonction de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *continue* 2π *périodique est limite uniforme sur* $\mathbb{R}$ *d'une suite de polynômes trigonométriques.*