II- Révisions de trigonométrie

Exercice 1

$$\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{5}) \iff \left\{\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{5}\,[2\pi] \\ x = \pi - \frac{\pi}{5}\,[2\pi] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Exercice 2

Pour résoudre des équations trigonométriques, il faut savoir transformé un sinus en cos ou inversement et savoir résoudre

$$\cos(a) = \cos(b) \iff \left\{\begin{array}{c} a = b\,[2\pi] \\ a = -b\,[2\pi] \end{array}\right.$$

et

$$\sin(a) = \sin(b) \iff \left\{\begin{array}{c} a = b\,[2\pi] \\ a = \pi - b\,[2\pi] \end{array}\right.$$

Donc ici,

$$\cos(3a) = \cos(b) \iff \left\{\begin{array}{c} 3a = b\,[2\pi] \\ 3a = -b\,[2\pi] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a = \frac{b}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \\ a = -\frac{1}{3}b + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

et

$$\sin(2a) = \cos(b) \iff \sin(2a) = \sin(\frac{\pi}{2} - b) \iff \left\{\begin{array}{c} 2a = \frac{\pi}{2} - b\,[2\pi] \\ 2a = \pi - \frac{\pi}{2} + b\,[2\pi] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a = \frac{\pi}{4} - \frac{b}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ a = \frac{\pi}{4} + \frac{b}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Exercice 3

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors $\cos(a+kb) = \Re(e^{i(a+kb)})$ et $\sin(a+kb) = \Im(e^{i(a+kb)})$. Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{i(a+kb)} &= e^{ia} \sum_{k=0}^{n} (e^{ib})^k \\
&= e^{ia} \frac{1 - e^{ib(n+1)}}{1 - e^{ib}}, \quad \text{car } b \neq 0 \\
&= e^{ia} \frac{e^{ib(n+1)/2}}{e^{ib/2}} \left(\frac{-2i \sin\left(\frac{b(n+1)}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{b}{2}\right)} \right) \\
&= e^{i(a+nb/2)} \frac{\sin\left(\frac{b(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) = \cos\left(a + nb/2\right) \frac{\sin\left(\frac{b(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}}$$

et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) = \sin\left(a + nb/2\right) \frac{\sin\left(\frac{b(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}}$$

III - Exercices de révisions autour de l'algèbre et l'algèbre linéaire

Exercice 1

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} f(P+\lambda Q) &= P(X+1)+\lambda Q(X+1)-P(X)-\lambda Q(X) \\ &= P(X+1)-P(X)+\lambda\left(Q(X+1)-Q(X)\right) \\ &= f(P)+\lambda f(Q) \end{aligned}$$

   Donc f est linéaire sur $\mathbb{R}_3[X]$ et va bien de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$, car si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $f(P)$ est bien un polynôme et $deg(f(P)) \leqslant deg(P)$.

   $\boxed{f \text{ donc un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[X].}$

2. Il suffit de calculer les images par f de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Or on a

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ f(X) &= 1 \\ f(X^2) &= (X+1)^2-X^2 = 2X+1 \\ f(X^3) &= (X+1)^3-X^3 = 3X^2+3X+1 \end{aligned}$$

   Ainsi la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. En notant C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de A. On remarque alors que $C_1 = 0$, et que (C_2, C_3, C_4) forment un système libre donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f) = 3$.

   De plus $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Vect}\ (f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \mathrm{Vect}\ (f(X), f(X^2), f(X^3)) = \mathrm{Vect}\ (1, 1+2X, 3X^2+3X+1) = Vect(1, 2X, 3X^2+3X) = \mathrm{Vect}\ (1, X, X^2)$ combinaison linéaire.

   $\boxed{\text{Ainsi } \mathrm{rg}(f) = 3 \text{ et } \mathrm{Im}\ f = \mathrm{Vect}\ (1, X, X^2)\ .}$

4. D'après le théorème du rang appliqué à f, comme $\mathbb{R}_3[X]$ est un espace vectoriel de dimension 4, on a $\boxed{\dim \mathrm{Ker}\ f = 1.}$

   De plus par les calculs précédents, on remarque que $f(1) = 0$ et donc $\boxed{\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Vect}\ (1).}$

Exercice 2 :

Soit $(A,B) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]^*$ alors il existe un unique couple $(Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en appliquant le théorème de la division au couple $(X^n, (X-1)(X-2)$ il existe un unique couple $(Q_1, R_1) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$X^n = (X-1)(X-2)Q_1(X) + R_1(X), \quad \text{avec } \deg(R_1) < 2$$

Donc il existe $(a,b) \in R^2$, tel que $R_1(X) = aX + b$. En évaluant l'égalité précédente en $X = 1$ et en $X = 2$ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 1^n &= a+b \\ 2^n &= 2a+b \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} a &= 2^n - 1 \\ b &= 2 - 2^n \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ainsi } R_1(X) = (2^n-1)X + (2-2^n).}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en appliquant le théorème de la division au couple $(X^n, (X-1)^2(X-2)$ il existe un unique couple $(Q_2, R_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$X^n = (X-1)^2(X-2)Q_2(X) + R_2(X), \quad \text{avec } \deg(R_2) < 3$$

Donc il existe $(a,b,c) \in R^3$, tel que $R_2(X) = aX^2 + bX + c$. En évaluant l'égalité précédente en $X = 1$ et en $X = 2$ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 1^n &= a+b+c \\ 2^n &= 4a+2b+c \end{cases}$$

Ici il nous manque une équation, si on dérive la relation $X^n = (X-1)^2(X-2)Q_2(X)+R_2(X)$, on a $nX^{n-1} = 2(X-1)(X-2)Q_2(X) + (X-1)^2Q_2(X) + 2aX + b$ donc en évaluant cette égalité en $x = 1$, on obtient

$$n = 2a + b$$

on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 1 &= a+b+c \\ 2^n &= 4a+2b+c \\ n &= 2a+b \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} a &= 2^n - n - 1 \\ b &= 3n + 2 - 2^{n+1} \\ c &= 2^n - 2n \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ainsi } R_2(X) = (2^n-n-1)X^2 + (3n+2-2^{n+1})X + (2^n-2).}$

IV - Exercices autour de l'analyse

Exercice 1

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Comme $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$, on a un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0)=2$.

On a aussi pour $x \in]0,\pi]$,

$$f'(x) = \frac{\sin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\tan\frac{x}{2} - \frac{x}{2}}{\cos(\frac{x}{2})\sin^2(\frac{x}{2})} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{1}{3}(\frac{x}{2})^3}{1.(\frac{x}{2})^2} = \frac{x}{6}$$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$.

f est continue sur $[0,\pi]$, $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et f' admet une limite en 0^+, donc d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi] \text{ et } f'(0)=0.}$

Exercice 2

1. On considère la fonction polynmiale associée à P. On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^3 + x + 1$.
   f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un $\alpha \in [-1,0]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   $\boxed{\text{Ainsi } P \text{ admet au moins une racine réelle dans } [-1,0].}$
2. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2+1 > 0$ donc f est stricement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injecteive sur $\mathbb{R}$, et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-infty} f = -\infty$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   $\boxed{P \text{ admet donc une unique racine réelle, il n'est pas scindé sur } \mathbb{R}}$.
   Par contre, d'après le théorème de d'Alembert Gauss, tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$. De plus, si on note ω une raicne complexe non réelle de P alors $\bar{\omega}$ est racine de P car P est à coefficients réels. De plus $\bar{\omega} \neq \omega$, donc P admet trois racines distinctes sur $\mathbb{C}$: ω, $\bar{\omega}$ et α.
   $\boxed{\text{Donc } P \text{ est scindé à racines simples sur } \mathbb{C}.}$