A rendre le lundi 5 septembre

I- Quelques conseils pour bien démarrer l'année

Pour les grandes vacances, je vous conseille de reprendre le travail avant la rentrée. Il ne faut pas travailler toutes les vacances mais il faut revoir vos cours de sup 10 à 15 jours avant la rentrée. L'année de spé démarre le **5 septembre**, il faut être prêt !!!!

Pour cela voilà un devoir en temps libre à rendre le lundi 5 septembre et aussi quelques consignes de révisions :

- Nous commencerons l'année par de l'algèbre linéaire, donc vos révisions sont à faire parmi les exercices proposés et plus si affinité (revoir votre cours, bien sûr !!!)
- Ensuite en ce qui concerne l'analyse, je ne peux vous donner que quelques conseils de base :
  - CONNAITRE PAR COEUR VOS FORMULES DE TRIGO et VOS DEVELOPPEMENTS LIMITES USUELS, ainsi que leurs applications classiques (montrer qu'une fonction est prolongeable par continuité) !
  - Connaître les racines $n^{ième}$ de l'unité !
  - Connaître les théorèmes classiques (Thm de Rolle, Thm des valeurs intermédiaires, Thm de la bijection, Inégalité des accroissements finis), connaître un théorème c'est connaître le résultat **AVEC LES HYPOTHESES** !!
  - Connaître les primitives usuels, le théorème d'intégration par parties et le théorème de changement de variable dans une intégrale.

Tout ce qui sera acquis ne sera plus à apprendre pour le concours !!!

*****

II- Révisions de trigonométrie et nombres complexes

<u>Exercice 1</u>
Résoudre $\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{5})$.

<u>Exercice 2</u>
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, résoudre $\cos(3a) = \cos(b)$ et $\sin(2a) = \cos(b)$.

<u>Exercice 3</u>
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $b \neq 0$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(a + kb)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(a + kb)$

*****

III - Exercices de révisions autour de l'algèbre et l'algèbre linéaire

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer le rang de f et une base de $\mathrm{Im}\ f$.
4. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}\ f$ et une base de $\mathrm{Ker}\ f$.

Exercice 2 :

Enoncer le théorème de la division euclidienne.

Soit $n \geqslant 3$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par

1. $P(X) = (X-1)(X-2)$.
2. $P(X) = (X-1)^2(X-2)$.

*****

IV - Exercices autour de l'analyse

Exercice 1 :

On note f le prolongement par continuité en 0 de la fonction définie sur l'intervalle $]0, \pi]$ par :

$$x \mapsto \frac{x}{\sin(x/2)}.$$

Montrer que $f(0) = 2$ et démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

Exercice 2 :

Soit $P(X) = X^3 + X + 1$.

1. Montrer que P admet au moins une racine réelle.
2. Montrer que P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ mais est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.