Exercice I

On notera pour les différents exemples C_1, C_2, C_3 les colonnes de la matrices.

1. Dans cet exemple, on a $C_1 = -C_2$, $2C_1 = C_3$ donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant 1$ et $C_1 \neq 0$ donc $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1.}$
   D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\ (A) = 3 - 1 = 2$ et comme $C_1 + C_2 = 0$ et $2C_1 - C_3 = 0$ on a $\boxed{\mathrm{Ker}\ (A) = \mathrm{Vect}\ \ ((1,1,0),(2,0,-1)).}$
2. Dans cet exemple, on a $C_2 = 0$, $2C_1 = C_3$ donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant 1$ et $C_1 \neq 0$ donc $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1.}$
   D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\ (A) = 3 - 1 = 2$ et comme $C_2 = 0$ et $2C_1 - C_3 = 0$ on a $\boxed{\mathrm{Ker}\ (A) = \mathrm{Vect}\ \ ((1,1,0),(2,0,-1)).}$
3. Dans cet exemple, on a $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, (C_1, C_2) libre donc $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2.}$
   D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\ (A) = 3 - 2 = 1$ et comme $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, on a $\boxed{\mathrm{Ker}\ (A) = \mathrm{Vect}\ \ ((1,1,1))}$.
4. On a :
$$M_a = \begin{pmatrix} -3a & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -2-a & 2+a \\ -3a & -2-a & 2+a \end{pmatrix}$$
   - On constate que la ligne 2 est l'opposée de la ligne 3 : Le rang est au plus 2.
   - Si $a \neq 0$ la ligne 1 et la ligne 2 sont proportionnelles si et seulement si elles sont égales (cf la première colonne) et donc si et seulement si $1 - 4a = -2 - a$, ce qui équivaut à $a = 1$.
     - Si $a \notin \{0, 1\}$ le rang est 2
     - si $a = 1$ le rang est au plus 1, et même exactement 1 car alors on a $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ non nul.
   - Si $a = 0$ On a la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ de rang 1.
$$\boxed{\mathrm{rg}\,(M_a) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in \{0,1\} \\ 2 \text{ sinon} \end{cases}}$$

Exercice II

1. H est un sev de $\mathbb{R}^3$ dont une famille génératrice est $e_1 = (-1,1,0)$ et $e_2 = (-1,0,1)$ car pour tout vecteur $(x,y,z) \in H$, $(x,y,z) = ye_1 + ze_2$. Cette famille est clairement libre donc c'est une base de H, H est donc de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$; (géométriquement c'est un plan !)
2. Par définition K est un sev de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1, donc $\dim H + \dim K = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
   De plus si $(x,y,z) \in H \cap K$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y,z) = \lambda(1,1,0)$, et $x + y + z = 0$ donne $\lambda = 0$ donc $H \cap K = \{0\}$.
   $\boxed{\text{Donc comme on est en dimension finie, on peut conclure que } H \oplus K = \mathbb{R}^3.}$
3. On raisonne par analyse et synthèse :
   Analyse : Pour un vecteur $X = (x,y,z)$ on cherche $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in H$ et $X_2 \in K$.
   On traduit d'abord que $X_2 \in K$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $X_2 = \lambda(1,1,0)$.

Alors $X_1 = X - X_2 \in H$ se traduit par, comme $X_1 = (x-\lambda, y-\lambda, z)$, $x-\lambda+y-\lambda+z=0$ donc $\lambda = \frac{1}{2}(x+y+z)$.

Ceci est la fin de l'analyse.

Synthèse : Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on pose $X_2 = \frac{1}{2}(x+y+z)(1,1,0)$ et $X_1 = X - X_2$.

Alors de manière évidente, $X_2 \in K$ car il est colinéaire au vecteur U et $X = X_1 + X_2$.

Il reste à vérifier que $X_1 \in H$. Or $X_1 = (x,y,z) - \frac{1}{2}(x+y+z)(1,1,0) = \frac{1}{2}(x-y-z, -x+y-z, 2z)$.

Alors on a bien $(x-y-z)+(-x+y-z)+2z = 0$ donc $X_1 \in H$.

Conclusion : $\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $X = X_1 + X_2$ avec

$$\boxed{X_1 = \frac{1}{2}(x-y-z, -x+y-z, 2z) \in H \text{ et } X_2 = \frac{1}{2}(x+y+z)(1,1,0) \in K.}$$

On a donc p la projection sur H parallèlement à K qui est donnée par

$$\boxed{p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto \frac{1}{2}(x-y-z, -x+y-z, 2z)}$$

et s la symétrie par rapport à H parallèlement à K qui est donnée par ($s = 2p - Id_E$),

$$\boxed{s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto \frac{1}{2}\,(-y-z, -x-z, z).}$$

4. La matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par : $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par : $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   On vérifie bien que $P^2 = P$, c'est à dire que P est un projecteur et $S^2 = I_3$ c'est à dire que S est une symétrie.

Problème

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Partie I :

1. On permute les colonnes 1 et 2 sans changer le rang de la matrice, ensuite $C_2 \leftarrow C_2 - 4C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$ alors on obtient la matrice suivante qui a le même rang que M : $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Cette matrice est évidemment de rang 2, donc M est de rang 2 engendré par exemple par la famille $(m(e_1), m(e_2))$ ou encore $(8e_1 - 9e_2 + 15e_3, e_1 - e_2 + 2e_3)$.

2. Pour déterminer Ker (m), aucune combinaison linéaire des colonnes évidente n'apparait. On détermine Ker (m) alors par un système.
   Soit $X = (x, y, z)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^3$.

   $$X \in \text{Ker } (m) \text{ ssi } \left\{ \begin{array}{rcl} 4x + y - z & = & 0 \\ -18x - 4y + 5z & = & 0 \\ 30x + 8y - 7z & = & 0 \end{array} \right. \text{ ssi } \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 4x + y \\ 2x + y & = & 0 \end{array} \right. .$$

   Donc $\underline{\text{Ker } m \text{ est une droite vectorielle engendré par } \varepsilon_1 = (1, -2, 2)}$.
   Pour Ker $(m - Id)$, on remarque que

   $$M - I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 4 & -4 \\ -18 & -5 & 5 \\ 30 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

   En notant (C_1, C_2, C_3) les colonnes de cette matrice, on remarque que (C_1, C_2) est libre et $C_2 + C_3 = 0$ donc $\text{rg}(m - Id) = 2$ et d'après le thm du rang $\dim \text{Ker } (m - id) = 2$ et Ker $(m - id) = $ Vect (ε_2) avec $\varepsilon_2 = (0, 1, 1)_{\mathcal{B}}$.
   $\underline{\text{Donc Ker } (m - id) \text{ est une droite vectorielle engendré par } \varepsilon_2 = (0, 1, 1)}$.

   Enfin, sur la matrice $M - 4I_3$, aucune combinaison linéaire simple des colonnes n'apparait. On résoud alors le système.
   Soit $X = (x, y, z)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^3$.

   $$\begin{array}{rcl} X \in \text{Ker } (m - 4id) & ssi & \left\{ \begin{array}{rcl} 12x + 4y - 4z & = & 0 \\ -18x - 8y + 5z & = & 0 \\ 30x + 8y - 11z & = & 0 \end{array} \right. \\ & ssi & \left\{ \begin{array}{rcl} 12x - 6z & = & 0 \\ 12x + 4y - 4z & = & 0 \end{array} \right. \\ & ssi & \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 2x \\ y & = & -x \end{array} \right. \end{array}$$

   $\underline{\text{Donc Ker } (m - 4id) \text{ est une droite vectorielle engendrée par } \varepsilon_3 = (1, -1, 2)}$.

3. On considère P la matrice de la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   On calcul le déterminant de P en le développant par rapport à la première ligne ou par la méthode de Sarrus :

   $$\det(P) = 1 \times (3) + 1 \times (-4) = -1 \neq 0.$$

Donc P est inversible, ainsi (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. P représente la matrice de passage de la base canonique à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

4. On remarque que $m(\varepsilon_1) = 0$, $m(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $m(\varepsilon_3) = 4\varepsilon_3$ donc la matrice de m dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est donnée par : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5. On a $M = mat_{\mathcal{B}}(m)$ et $D = mat_{\mathcal{B}'}(m)$ avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, de plus P est la matrice de passage de la base canonique à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$,
le théorème de changement de base nous permet d'affirmer que $M = PDP^{-1}$.

6. Les puissances de D sont : pour tout n de $\mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

   De plus par récurrence, on a pour tout n de $\mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$; Il faut donc calculer P^{-1}, la méthode du pivot, par exemple, donne : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   On a alors après calculs : pour tout n de $\mathbb{N}$, $M^n = \begin{pmatrix} 4^{n+1} & 4^n & -4^n \\ -2-4^{n+1} & -4^n & 1+4^n \\ -2+2.4^{n+1} & 2.4^n & 1-2.4^n \end{pmatrix}$.

Partie II

1. l'endomorphisme id commute avec m, donc $C(m)$ est non vide.
   Soit $(f, g) \in C(m)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} (\lambda f + g) \circ m &= \lambda f \circ m + g \circ m \\ &= \lambda m \circ f + m \circ g \quad \text{car } f, g \in C(m) \\ &= m \circ (\lambda f) + m \circ g \\ &= m \circ (\lambda f + g) \end{aligned}$$

   donc $\lambda f + g \in C(m)$.
   Donc $C(m)$ est non vide et stable par combinaison linéaire, c'est donc un sev de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2. Supposons que $\Delta = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, avec $a, b, c, d, e, f, g, h, \in \mathbb{R}$.

   Alors $D\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$, et

   Alors $\Delta D = \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix}$.

   Donc $D\Delta = \Delta D$ ssi

$$\begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ f = 4f \\ g = 0 \\ 4h = h. \end{cases}$$

ssi Δ est diagonale.
Conclusion : une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec D si et seulement si elle est diagonale.

3. $C(m)$ est en bijection avec les matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il est donc de dimension 3.
4. Une base des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est :

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi une base de $C(M)$ est donnée par : $\Delta_1 = P\delta_1 P^{-1}$, $\Delta_2 = P\delta_2 P^{-1}$ et $\Delta_3 = P\delta_3 P^{-1}$ et une base de $C(m)$ est donnée par les endomorphismes canoniquement associés Ã Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

5. $\{P(m)/P \in \mathbb{R}_2[X]\}$ est inclus dans $C(m)$, car toute puissance de m commute avec m et l'identité aussi.

D'autre part $\dim C(m) = 3$ et $\{P(m)/P \in \mathbb{R}_2[X]\} = \text{Vect }(I_3, m, m^2)$ or la famille (I_3, m, m^2) est libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ (on peut le vérifier à l'aide des matrices....)

Donc $\{P(m)/P \in \mathbb{R}_2[X]\} \subset C(m)$ et $\dim C(m) = \dim\{P(m)/P \in \mathbb{R}_2[X]\}$,
donc $\{P(m)/P \in \mathbb{R}_2[X]\} = C(m)$.

Partie III

1. C'est la matrice de passage vu dans la première partie, elle est donc inversible.
2. (a) $\Delta^2 = (P^{-1}NP)(P^{-1}NP) = P^{-1}N^2P = P^{-1}MP = D$.
   Donc $\Delta^2 = D$..

   (b) $\Delta D = \Delta\Delta^2 = \Delta^2\Delta = D\Delta$ donc Δ commute avec D.

   (c) Δ est donc diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, avec $a^2 = 0$, $b^2 = 1$ et $c^2 = 4$.
   Donc $a = 0$, $b = \pm 1$ et $c = \pm 2$.
   Les valeurs possibles de Δ sont donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. X est solution de $X^2 = M$ ssi $X = P\Delta P^{-1}$, avec Δ décrite au-dessus.
   Ainsi, il y a 4 solutions à l'équation.