Problème

Partie I

1. D est bien une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
   De plus D est linéaire : $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
   $$\begin{aligned} D(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) - \lambda P(X) + Q(X+1) - Q(X) \\ &= \lambda D(P) + D(Q). \end{aligned}$$
   D est une endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. (a) Soit $P \in \text{Ker } D$, alors
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) = P(x) \quad (*).$$
   Montrons par récurrence sur p que $\forall p \in \mathbb{N}$, $P(p) = P(0)$.
   – La propriété est évidemment vraie au rang $p = 0$.
   – Supposons qu'elle soit vraie au rang $p \geqslant 0$.
   – Alors $P(p+1) = P(p)$ par $(*)$, or par hypothèse de récurrence $P(p) = P(0)$, donc $P(p+1) = P(0)$. La propriété est donc héréditaire.
   Donc : $\forall p \in \mathbb{N}$, $P(p) = P(0)$.

   (b) Soit $P \in \text{Ker } D$, alors le polynôme $P - P(0)$ admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Ainsi P est le polynôme constant égal à $P(0)$.
   Les polynômes constants sont évidemment dans le noyau de D.
   Donc $\text{Ker } D = \mathbb{R}_0[X]$.

3. (a) On va raisonner à l'aide des termes dominants. Soit P de degré n, son terme dominant est de la forme $a_n X^n$, le terme dominant de $D(P)$ est alors le terme dominant de $a_n(X+1)^n - X^n$, en utilisant la formule du binôme de Newton, on a que le terme dominant de $D(P)$ est $n a_n X^{n-1}$.
   Donc $\deg(D(P)) = \deg(P) - 1$ et si a est le coefficient dominant de P alors $\deg(P)a$ est le coefficient dominant de $D(P)$.

   (b) Soit n de $\mathbb{N}^*$. On a montré que $D(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$, donc La restriction de D à $\mathbb{R}_n[X]$ est une endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. On le notera D_n.
   De manière évidente , on a $D(\mathbb{R}_0[X]) = \{0\}$. Donc D restreint à $\mathbb{R}_0[X]$ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_0[X]$.

   (c) Soit n de $\mathbb{N}$. On a $\text{Ker } D_n = \text{Ker } D \cap \mathbb{R}_n[X]$, donc d'après la question 2.a. $\text{Ker } D_n = \mathbb{R}_0[X]$.
   D'après le théorème du rang, puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie égale à $n+1$, on a
   $$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\text{Ker } D_n) + \dim(\text{Im } D_n).$$
   Or $\dim(\text{Ker } D_n) = \dim(\mathbb{R}_0[X]) = 1$, donc $\dim(\text{Im } D_n) = n$.
   Si $n = 0$, $\dim(\text{Im } D_n) = 0$, donc $\text{Im } (D_n) = \{0\}$, D_0 est l'application nulle.
   Si $n \geqslant 1$, $\dim(\text{Im } D_n) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ et on a vu que $\text{Im } D_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $\text{Im } D_n$ est un sev de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui a même dimension, d'où $\text{Im } D_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note $n = \deg(P)$, alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_n[X] = D_{n+1}(\mathbb{R}_{n+1}[X])$, d'après la question précédente. Donc il existe $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $D_{n+1}(Q) = P$, c'est à dire, comme D_{n+1} est la restriction de D à $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ $D(Q) = P$. Donc D est surjective.
5. (a) F est le noyau de la forme linéaire $\Psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(0)$, donc F est un sev de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) *Attention ici on ne peut pas utiliser la caractérisation de la supplémentarité par les dimensions car $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie!!!.*
   Montrons que $F \cap \text{Ker } D = \{0\}$: soit $P \in F \cap \text{Ker } D$, alors P est le polynôme constant égal à $P(0) = 0$ car $P \in F$. Donc P est le polynôme nul.
   Montrons que $F + \text{Ker } D = \mathbb{R}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_[X]$. On pose $P_1 = P(0)$ et $P_2 = P - P(0)$. Alors $P_1 \in \text{Ker } D$ puisque c'est un polynôme constant et $P_2 \in F$ puisque $P_2(0) = 0$. Donc $F + \text{Ker } D = \mathbb{R}[X]$.
   Conclusion : $\mathbb{R}[X] = F \oplus \text{Ker } D$.
   (c) D'après la question précédente, pour tout Q de $\mathbb{R}[X]$ comme D est surjective $\exists R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = D(R)$. Alors il existe un unique $P \in F$ et un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $R = P + \lambda$. Alors $Q = D(P) + D(\lambda) = D(P)$ et $P(0) = 0$. De plus d'après la question 2.a. , $\deg(P) = \deg(Q) + 1$.

Partie II

1. Construisons la suite $(H_n)_n$ par récurrence. Pour $n = 0$, on pose $H_0(X) = 1$.
   Supposons $n \geqslant 0$ et H_n construit. D'après la question 5 de la partie I, il existe un unique polynôme H_{n+1} tel que $D(H_{n+1}) = H_n$ et $H_{n+1}(0) = 0$. Donc H_{n+1} existe.
   Ainsi par récurrence la suite $(H_n)_n$ existe.
2. D'après la question 5 de la partie I, $\deg(H_1) = \deg(H_0) + 1 = 1$. On cherche donc $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $H_1(X) = aX + b$. On a alors $D(H_1(X)) = a(X + 1) - ax$. Donc $D(H_1) = H_0$ ssi a=1. De plus $H_1(0) = 0$, donc $b = 0$. Ainsi $H_1(X) = X$.
   D'après la question 5 de la partie I, on cherche H_2 de degré 2. De plus $H_2(0) = 0$ donc on cherche H_2 sous la forme $aX^2 + bX$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :
   $$\begin{aligned} D(H_2) &= a(X+1)^2 + b(X+1) - aX^2 - bX \\ &= 2aX + a + b \end{aligned}$$
   Donc $D(H_2) = H_1$ ssi $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.
   Conclusion : $H_2(X) = \frac{1}{2}X(X-1)$.
3. Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$
   $$H_n(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}.$$
   La propriété est vraie au rang $n = 1$ d'après la question précédente.
   Supposons la propriété vraie au rang n. Posons
   $$P(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-n)}{n+1!}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
D(P) &= \frac{X+1(X)(X-1)\dots(X-n+1)}{n+1!} - \frac{X(X-1)(X-2)\dots(X-n)}{n+1!}\\
&= \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n+1!}(X+1-(X-n))\\
&= \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n+1!}(n+1)\\
&= H_n(X).
\end{aligned}$$

Or d'après la question 1, H_{n+1} est l'unique polynôme tel que $D(H_{n+1}) = H_n$ et $H_{n+1}(0) = 0$. Or On a montré que $D(P) = H_n$ et $P(0) = 0$, donc par unicité on a $P = H_{n+1}$, cqfd.

4. La famille $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de $n+1$ vecteurs et libre car formés de polynômes dont la suite des degrés est strictement croissante. Donc, comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, la famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. D'après la question 1 de la partie II, la matrice de D_n dans la base $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

6. Le matrice de D_n est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous nuls, donc $D^n = 0$. D est nilpotente.

Partie III

1. (a) H_0 est constant donc $D(H_0) = 0$ et pour $i > 0$ $D(H_i) = H_{i-1}$.
   On en déduit que :
   $$D^k(H_i) = H_{i-k} \quad \text{si} \quad i \geqslant k, \quad \text{et} \quad D^k(H_i) = 0 \quad \text{sinon.}$$
   Puis,
   $$D^k(H_i)(0) = 1 \quad \text{si} \quad i = k \quad \text{et} \quad D^k(H_i) = 0 \quad \text{sinon.}$$
   (b) Le calcul précédent permet de remarquer que :
   $$\forall (i,k) \in \{0,\dots,n\}^2, \quad D_n^k(H_i) = \delta_{i,k}.$$
   Or pour $k \in \{0,\dots,n\}$, les $n+1$ applications $(P \mapsto D_n^k(P)(0))$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   Puisque $D_n^k(H_i) = \delta_{i,k}$, ces applications constituent la base duale de la base de $(H_0,\dots,H_n)$.
   Par conséquent :
   $$P = \sum_{k=0}^{n} H_k^*(P)H_k = \sum_{k=0}^{n} D_n^k(P)(0)H_k.$$
   (c) Ici $n = 2$ et $P(X) = X^2$, alors
   $$\begin{aligned}
   D_2^0(X^2) &= X^2\\
   D_2^1(X^2) &= (X+1)^2 - X^2 = 2X+1\\
   D_2^2(X^2) &= 2(X+1)+1-2X-1 = 2
   \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} D_2^0(X^2)(0) & = & 0 \\ D_2^1(X^2)(0) & = & 1 \\ D_2^2(X^2)(0) & = & 2 \end{array}$$

d'où

$$\underline{X^2 = H_1 + 2H_2}$$

Ici $n = 3$ et $P(X) = X^3$, alors

$$\begin{array}{rcl} D_3^0(X^3) & = & X^3 \\ D_3^1(X^3) & = & (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1 \\ D_3^2(X^3) & = & 3(X+1)^2 + 3(X+1) + 1 - (3X^2 + 3X + 1) = 6X + \end{array}$$

$D_3^3(X^3) = 6(X+1) + 6 - (6X+6) = 6$

Alors

$$\begin{array}{rcl} D_3^0(X^3)(0) & = & 0 \\ D_3^1(X^3)(0) & = & 1 \\ D_3^2(X^3)(0) & = & 6 \\ D_3^3(X^3)(0) & = & 6 \end{array}$$

d'où

$$\underline{X^3 = H_1 + 6H_2 + 6H_3}$$

2. (a) Montrons que la famille $\mathcal{L}^* = (L_0^*, L_1^*, \ldots, L_n^*)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
$(\mathbb{R}_n[X])^*$ est de même dimension que $\mathbb{R}_n[x]$ donc est de dimension $n+1$, comme le cardinale de la famille $\mathcal{L}^*$ est $n+1$, il suffit de montrer que c'est une famille libre.
Soit $(\alpha_0, \ldots \alpha_n) \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$\alpha_0 \mathcal{L}_0^* + \cdots + a_n \mathcal{L}_n^* = 0$$

Alors évaluons cette égalité en H_n, comme $0,\ 1, \ldots n-1$ sont racines de H_n, il reste seulement

$$a_n \mathcal{L}_n^*(H_n) = a_n 1 = 0$$

Donc $a_n = 0$.
Maintenant on a donc

$$\alpha_0 \mathcal{L}_0^* + \cdots + a_{n-1} \mathcal{L}_{n-1}^* = 0$$

en évaluant cette égalité en H_{n-1}, on obtient que $a_{n-1} = 0$.
Ainsi par récuurence, on a que $a_i = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$.
Donc la famille $\underline{\mathcal{L}^* \text{ est une famille libre, c'est donc une base de } (\mathbb{R}_n[X])^*}$.

(b) Les $n+1$ réels $0, \ldots, n$ sont distincts, il existe alors (Polynôme de Lagrange) pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, un unique polynôme L_j tel que :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\},\ L_j(i) = \delta_{i,j}.$$

De plus $L_j(X) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i \leqslant n, i \neq j} \frac{X-i}{(j-i)}$.
De plus tous ces polynômes forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) Dans notre cas, $n = 3$ et

$$\begin{aligned} T &= T(0)L_0 + T(1)L_1 + T(2)L_2 + T(3)L_3 \\ &= 0L_0 + 1L_1 + 17L_2 + 98L_3 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} L_1(X) &= \frac{X(X-2)(X-3)}{2} \\ L_2(X) &= \frac{X(X-1)(X-3)}{2} \\ L_3(X) &= \frac{X(X-1)(X-3)}{6} \end{aligned}$$