A rendre le lundi 19 septembre

PROBLEME

Dans ce problème, $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sev de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On considère l'application $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

Partie I

1. Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. (a) Montrer que si $P \in \text{Ker }\ D$, alors pour tout p de $\mathbb{N}$, $P(p) = P(0)$.
   (b) En déduire que $\text{Ker }\ D = \mathbb{R}_0[X]$.
3. (a) Préciser le degré de $D(P)$ en fonction du degré de P. Préciser aussi le coefficient dominant de $D(P)$ en fonction de celui de P.
   (b) En déduire que , pour tout n de $\mathbb{N}$, D peut être restreint en un endomorphisme, noté D_n, de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Déterminer $\text{Ker }\ D_n$ et $\text{Im }\ D_n$.
4. Montrer que D est surjectif.
5. (a) Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 0\}$. Montrer que F est une sev de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Montrer que $F \oplus \text{Ker }\ D = \mathbb{R}[X]$.
   (c) Conclure que, pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et tel que $D(P) = Q$. Préciser le degré de P en fonction de celui de Q.

Partie II

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ vérifiant
$$H_0(X) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, D(H_{n+1}) = H_n \text{ et } H_{n+1}(0) = 0.$$
2. Expliciter H_1 et H_2.
3. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:
$$H_n(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}.$$
4. Justifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Préciser la matrice de D_n dans la base $(H_0, H_1, \dots, H_n)$.
6. En déduire que D_n est nilpotent.

Partie III

1. Soit $(H_0^*, H_1^*, \dots, H_n^*)$ la base duale de $(H_0, H_1, \dots, H_n)$.
   (a) Calculer pour tout $(i, k) \in \mathbb{N}^2$, $D^k(H_i)$ et $D^k(H_i)(0)$.
   (b) Expliciter $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} H_k^*(P) H_k$ en déterminant, pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, les $H_k^*(P)$ en fonction de D_n et de P.

(c) Expliciter les monômes X^2, X^3 dans la base correspondante de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Soit k un entier. On définit l'application : $L_k^* : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(i)$.

   (a) Montrer que $\mathcal{L}^* = (L_0^*, L_1^*, \dots, L_n^*)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

   (b) Déterminer la base préduale qui sera notée $\mathcal{L} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$.

   (c) En utilisant $\mathcal{L}$, déterminer un polynôme T, de degré 3, dont le graphe contienne les points :

$$\left(i, \sum_{j=0}^{i} j^4\right) \quad \text{pour } i \text{ dans } \{0, 1, 2, 3\}.$$