Exercice I, Navale

1. • $\boxed{N_1 \text{ est une application de } E \text{ à valeurs dans } \mathbb{R}_+.}$ (1)

   • Soit $f \in E$ tel que $N_1(f) = 0$, alors en particulier $||f||_\infty = 0$ donc $f = 0$ sur $[0, 1]$. $\boxed{\text{D'où la séparation.}}$ (2)

   • Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \in [0, 1]$

   $$\begin{aligned} |\lambda f(x)| &= |\lambda||f(x)| \\ &\leqslant |\lambda|||f||_\infty \end{aligned}$$

   Donc
   $$||\lambda f||_\infty \leqslant |\lambda|||f||_\infty.$$
   De même, on a
   $$||\lambda f'||_\infty \leqslant |\lambda|||f'||_\infty.$$
   Donc
   $$N_1(\lambda f) \leqslant |\lambda| N_1(f).$$
   Soit $\lambda \neq 0$, en appliquant le résultat précédent à $\dfrac{1}{\lambda}$ et λf, on a

   $$N_1(f) = N_1\left(\frac{1}{\lambda}\lambda f\right) \leqslant \frac{1}{|\lambda|} N_1(\lambda f)$$

   Donc
   $$|\lambda| N_1(f) \leqslant N_1(\lambda f).$$
   Cette inégalité est évidente si $\lambda = 0$.
   $\boxed{\text{On a donc montré que } N_1(\lambda f) = |\lambda| N_1(f).}$ (3)
   • Soit $f, g \in E$, et $x \in E$ alors

   $$\begin{aligned} |f(x) + g(x)| &\leqslant |f(x)| + |g(x)| \\ &\leqslant ||f||_\infty + ||g||_\infty \end{aligned}$$

   Donc en passant au sup sur x, comme le terme de droite est un majorant indépendant de x, on obtient :
   $$||f + g||_\infty \leqslant ||f||_\infty + ||g||_\infty$$
   .
   En appliquant ce qui précède à f' et g', on obtient de même

   $$||f' + g'||_\infty \leqslant ||f'||_\infty + ||g'||_\infty$$

   .
   $\boxed{\text{On a donc montré, en ajoutant ces deux inégalités, que } N_1(f + g) \leqslant N_1(f) + N_1(g).}$ (4)

   D'après (1), (2), (3) et (4) on peut conclure que $N_1(f)$ est une norme sur E.

2. N_2 est une application de E dans $\mathbb{R}_+$.
   Soit $f \in E$ telle que $N_2(f) = 0$. Alors $f + f' = 0$. Donc $f(x) = \lambda e^{-x}$ or $f(0) = 0$ donc $\lambda = 0$ et $f = 0$.
   $\boxed{\text{D'où la séparation pour } N_2.}$
   Pour l'homogénéité et l'inégalité triangulaire ceux sont les mêmes arguments que pour N_1.
   $\boxed{\text{On peut donc conclure que } N_2 \text{ est une norme sur } E.}$

3. On a une première inégalité évidente : $\forall f \in E, \forall x \in [0,1], |f(x)+f'(x)| \leqslant |f(x)|+|f'(x)| \leqslant ||f||_\infty + ||f'||_\infty$.
   Donc $||f+f'||_\infty \leqslant ||f||_\infty + ||f'||_\infty$, c'est à dire $N_2(f) \leqslant N_1(f)$.
   Pour la deuxième inégalité, on pose pour $f \in E$ $g = f + f'$.
   On peut considérer cette égalité comme une équation différentielle linéaire et la résoudre : l'équation homogène est de solution $x \mapsto ke^{-x}$ et en faisant varier la constante on a $k'(x) = g(x)e^x$, sachant que $f(0) = 0$, la solution de l'équation est $f(x) = e^{-x} \displaystyle\int_0^x g(t)e^t\,dt$.
   On en déduit pour $x \in [0,1]$:
$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| e^{-x} \int_0^x g(t)e^t\,dt \right| \\ &\leqslant e^{-x} \int_0^x e^t |g(t)|\,dt \\ &\leqslant ||g||_\infty \int_0^1 e^t\,dt \\ &\leqslant N_2(f)e \quad \text{car } g = f + f' \end{aligned}$$
   On a donc en passant au sup sur x
$$||f||_\infty \leqslant eN_2(f)$$
   Donc
$$\begin{aligned} N_1(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty &\leqslant ||f||_\infty + ||f'+f-f||_\infty \\ &\leqslant ||f||_\infty + N_2(f) + ||f||_\infty \\ &\leqslant (2e+1)N_2(f) \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{On a donc montré que } \forall f \in E, \quad N_2(f) \leqslant N_1(f) \leqslant (2+e)N_2(f)}$.
   $\boxed{\text{Ainsi les normes } N_1 \text{ et } N_2 \text{ sont équivalentes sur } E.}$

Exercice II, Cyr

1. P_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $P_n'(x) = nx^{n-1} + \cdots + 2x + 1 > 0$. Donc P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ dans $[-1,+\infty[$. Donc il existe un unique $a_n \in]0,+\infty[$ tel que $P_n(a_n) = 0$. On remarque que $P_n(1) \geqslant 0$. Donc $a_n \in]0,1[$.
2. $P_{n+1}(a_n) = a_n^{n+1} + P_n(a_n) = a_n^{n+1} \geqslant 0 = P_{n+1}(a_{n+1})$, or P_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $a_n \geqslant a_{n+1}$.
3. Ainsi la suite (a_n) est décroissante et positive donc convergente vers $l \in [0,1[$. ($l < 1$ car $a_n < 1$ et (a_n) est décroissante.)
4. On remarque que $P_n(a_n) = 0 = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_n^k - 2 = \frac{1-a_n^n}{1-a_n} - 1$ car $a_n < 1$. De plus (a_n) est décroissante donc $l \leqslant a_2 < 1$.
   Alors $a_n^n = \exp(n\ln(a_n))$ tend vers 0. En passant à la limite dans $P_n(a_n) = 0$,on obtient $\dfrac{1}{1-l} - 2 = 0$, c'est à dire $l = \dfrac{1}{2}$. $\boxed{\text{Donc } l = \frac{1}{2}.}$