A rendre le lundi 3 octobre

Exercice I

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \,/\, f(0) = 0\}$. Pour $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ on note $||f||_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Pour $f \in E$ on définit :

$$N_1(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = ||f + f'||_\infty.$$

1. Montrer que N_1 est une norme.
2. Montrer que N_2 est une norme.
3. Montrer que ces deux normes sont équivalentes. *Pour la deuxième inégalité, on pourra s'intéresser à l'équation différentielle $g = f + f'$.*

Exercice II

Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n(X) = X^n + X^{n-1} + \cdots + X^2 + X - 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que P_n admet une unique racine réelle positive que l'on notera a_n.
2. Montrer que la suite (a_n) décroit.
3. En déduire que la suite (a_n) converge.
4. Déterminer la limite de la suite (a_n).