Problème E3A PSI 2010

Partie A.

1.a. Au vu de la question suivante, on ne doit pas mentionner un calcul de déterminant triangulaire par blocs. Pour la première relation ainsi que la seconde, on peut faire des développements successifs selon la première colonne (n fois). Pour la troisième, on développe cette fois successivement (n fois) par rapport à la dernière colonne.

1.b. Il suffit de remarquer que

$$\begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$

puis d'utiliser la propriété de morphisme multiplicatif du déterminant pour obtenir, avec la question précédente,

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ O_n & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$$

1.c. En utilisant l'invariance du déterminant par transposition, on obtient alors

$$\det\begin{pmatrix} A & O_n \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$$

2. On a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$

et donc (avec la propriété de morphisme multiplicatif du déterminant et la question 1) $\det(M)\det(D) = \det(AD-BC)\det(D)$. Si D est inversible, on peut simplifier par $\det(D)\neq 0$ et obtenir

$$\det(M) = \det(AD-BC)$$

3.a. Soit S le spectre complexe de D (c'est un ensemble de cardinal fini $\leqslant n$). Si $x\notin S$ alors D_x est inversible et donc (question précédente) $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$.

3.b. Comme S est fini, il existe $r>0$ tel que $]0,r[\cap S = \emptyset$. On a ainsi

$$\forall x\in]0,r[,\ \det(M_x) = \det(AD_x - BC)$$

Le passage au déterminant étant continu, on peut faire tendre r vers 0 pour obtenir

$$\det(M) = \det(AD-BC)$$

On a bien sûr utilisé $D_r\to D$ quand $r\to 0$ qui donne $M_r\to M$ et $AD_r - BC\to AD-BC$.

Partie B.

1. Il est important de prendre garde à l'ordre des vecteurs choisi pour la base canonique. A part cela, on doit juste exprimer $R_A(E_{i,j})$ ou $L_A(E_{i,j})$ et mettre les coordonnées en colonnes. Le calcul donne

$$Mat(R_A,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \quad\text{et}\quad Mat(L_A,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$$

2. On écrit les matrices précédentes par blocs

$$Mat(R_A,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} aI_2 & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 \end{pmatrix} \quad\text{et}\quad Mat(L_A,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ 0 & {}^tA \end{pmatrix}$$

Il suffit alors de combiner ces matrices pour obtenir

$$M_A = \begin{pmatrix} aI_2 - q\,{}^tA & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 - q\,{}^tA \end{pmatrix}$$

3.a. Comme cI_2 et $dI_2 - q^tA$ commutent, on peut utiliser la formule de la partie A :

$$\begin{aligned}\det(M_A) &= \det((aI_2 - q^tA)(dI_2 - q^tA) - bcI_2)\\ &= \det((ab-bc)I_2 - q(a+d)^tA + q^2({}^tA)^2)\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\tilde{A}$ étant la transposée de la comatrice de A on a (formule de cours que l'on peut vérifier à la main pour cette matrice de taille 2)

$$A\tilde{A} = \det(A)I_2$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\det(A)\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2) &= \det(A\tilde{A} + q^2A^2 - q(a+d)A)\\ &= \det((ad-bc)I_2 - q(a+d)A + q^2A^2)\end{aligned}$$

Le déterminant étant invariant par transposition, on conclut que

$$\det(M_A) = \det(A)\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2)$$

3.b. On a

$$\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2) = \det\begin{pmatrix} (q-1)(qa-d) & b(q-1)(q+1)\\ c(q-1)(q+1) & (q-1)(qd-a)\end{pmatrix}$$

Par multilinéarité du déterminant on a ainsi

$$\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2) = (1-q)^2\det\begin{pmatrix} -qa+d & -b(q+1)\\ -c(q+1) & -qd+a\end{pmatrix}$$

et avec la question précédente,

$$\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\det\begin{pmatrix} d-qa & -(1+q)b\\ -(1+q)c & a-qd\end{pmatrix}$$

3.c. On a maintenant

$$\det\begin{pmatrix} -qa+d & -b(q+1)\\ -c(q+1) & -qd+a\end{pmatrix} = (1+q)^2(ad-bc) - q(a+d)^2 = (1+q)^2\det(A) - q(\mathrm{Tr}(A))^2$$

et la question précédente donne

$$\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\left((1+q)^2\det(A) - q(\mathrm{Tr}(A))^2\right)$$

4.a. $P_A(X) = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta$ et donc $\mathrm{Tr}(A) = \alpha+\beta$ et $\det(A) = \alpha\beta$. La question précédente donne alors

$$\det(M_A) = (1-q)^2\alpha\beta((1+q)^2\alpha\beta - q(\alpha+\beta)^2) = (1-q)^2\alpha\beta((1+q^2)\alpha\beta - q\alpha^2 - q\beta^2)$$

Il reste à remarquer que $P_A(q\alpha)P_A(q\beta) = (q-1)^2\alpha\beta(q\beta-\alpha)(q\alpha-\beta)$ et à développer le dernier produit pour conclure que

$$\det(M_A) = P_A(q\alpha)P_A(q\beta)$$

4.b. On travaille en deux temps.

- S'il existe $B \neq 0$ telle que $AB = qBA$ alors $(R_A - qL_A)(B) = 0$ et donc $R_A - qL_A$ est non inversible. Son déterminant est nul et donc $P_A(q\alpha) = 0$ ou $P_A(q\beta) = 0$ c'est à dire $q\alpha \in \{\alpha, \beta\}$ ou $q\beta \in \{\alpha, \beta\}$. Si $\det(A) \neq 0$ alors α et β sont non nuls (0 non valeur propre de A) et $q\alpha \neq \alpha$, $q\beta \neq \beta$ ($q \neq 1$). La condition devient alors $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.
  Finalement, on a $\det(A) = 0$ ou $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.
- Réciproquement, si cette condition a lieu alors $\det(M_A) = 0$ et $R_A - qL_A$ n'est pas inversible. Il existe $B \neq 0$ dans son noyau et ceci s'écrit $AB = qBA$.

5. Distinguons trois cas.

- 0 est valeur propre simple de A. Dans ce cas, il existe une autre valeur propre complexe $\alpha \neq 0$ et A est diagonalisable, semblable à $\text{diag}(\alpha, 0)$ (deux sous-espaces propres qui sont des droites).
- 0 est valeur propre double. Dans ce cas, $P_A = X^2$ et $A^2 = 0$ (Cayley-Hamilton). Comme $A \neq 0$, il existe un vecteur colonne E_1 tel que $E_2 = AE_1 \neq 0$. Si $c_1E_1 + c_2E_2 = 0$ alors (on compose par A) $c_1E_2 = 0$ et donc $c_1 = 0$ (car $E_2 \neq 0$) puis $c_2E_2 = 0$ et donc $c_2 = 0$. La famille (E_1, E_2) est libre et est une base de $\mathbb{R}^2$ (identifié à l'espaces des matrices unicolonnes). Dans cete base, l'endomorphisme canoniquement associé à A est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et A est donc semblable à cette matrice.
- Si 0 n'est pas valeur propre de A alors $\det(A) \neq 0$ et $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$. Comme $q \neq 1$, on a $\alpha \neq \beta$ et on a deux valeur propres. A est diagonalisable et semblable à $\text{diag}(\alpha, \beta)$.