

CCP 2006 -PSI
Première épreuve, Partiel

Partie I.

1.1. D'après la formule du binôme,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

1.2. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n^* = 1$.

1.3. Les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ sont grossièrement divergentes.

2.1. La formule du binôme indique que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n^* = \frac{1}{2^n} (z+1)^n$$

2.2.1. On sait calculer les sommes géométriques. La raison z étant différente de 1,

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Pour $|z| < 1$ ce terme admet une limite. $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge et

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

2.2.2. On a $\left| \frac{z+1}{2} \right| \leq \frac{1+|z|}{2} < 1$ et $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ est donc aussi une série géométrique convergente de somme

$$\sum_{n \geq 0} a_n^* = \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}} = \frac{2}{1-z} = 2A(z)$$

2.3.1. La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est grossièrement divergente (terme général qui n'est pas de limite nulle).

2.3.2. Si $z = -2$ alors $a_n^* = (-1/2)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente.

2.3.3. (a_n^*) est une suite géométrique de raison $r = \frac{e^{i\theta}+1}{2} = \cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$. Comme $\theta \in]0, \pi[$, $|r| \in]0, 1[$ et

$\sum_{n \geq 0} a_n^*$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k^* = \frac{1}{1-r} = \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{ie^{-i\theta/2}}{\sin(\theta/2)} = 1 + i \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

Partie II.

1.1.1. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

1.1.2. Par croissance comparées, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} = 0$$

1.2. q étant fixé, $S_q(n, a)$ est alors une suite finie de suites de limite nulle et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_q(n, a) = 0$$

1.3. Soit $\varepsilon > 0$. Comme a est de limite nulle, il existe un rang q tel que $\forall k \geq q, |a_k| \leq \varepsilon/2$. La suite $S_q(n, a)$ étant de limite nulle, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |S_q(n, a)| \leq \varepsilon/2$. On a alors

$$\forall n \geq n_0, |a_n^*| = \left| S_q(n, a) + \frac{1}{n} \sum_{k=q+1}^n \binom{n}{k} a_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=q+1}^n \binom{n}{k} \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $\sum_{k=q+1}^n \binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \leq 2^n$, on a finalement

$$\forall n \geq n_0, |a_n^*| \leq \varepsilon$$

et on a montré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^* = 0$$

1.4. On a

$$a_n^* - l = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_k - l)$$

et on se ramène au cas précédent ($a_n - l \rightarrow 0$). Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^* = l$$

1.5. Si $a_n = (-2)^n$ alors (a_n^*) est une suite convergente de limite nulle alors que (a_n) est une suite divergente.

Il n'y a donc pas équivalence entre les convergences de (a_n) et de (a_n^*) .

2.1. Un calcul au brouillon (non reporté) donne

$$U_0 = S_0, U_1 = 2S_0 + S_1, U_2 = S_2 + 3S_1 + 3S_0, U_3 = S_3 + 4S_2 + 6S_1 + 4S_0$$

2.2.1. On peut donc supposer que

$$U_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k$$

2.2.2. La formule précédente est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3$. Soit $n \geq 3$ tel que la formule soit vraie jusqu'au rang $n - 1$. On remarque que

$$U_n = 2^n T_n = 2U_{n-1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$$

On utilise alors la remarque de l'énoncé pour exprimer a_k à l'aide de S_k et S_{k-1} . En réordonnant les termes (on scinde la somme en deux et on réindice), on obtient

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1} \right) S_k + S_n$$

Avec l'hypothèse de récurrence au rang $n - 1$, on a donc

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \right) S_k + S_n$$

La formule $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ permet alors de montrer le résultat au rang n .

2.3. On suppose que $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge et on note S sa somme. On a donc $S_n \rightarrow S$ quand $n \rightarrow +\infty$. Avec la question précédente, on a

$$U_{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S_{k+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{k+1} - S_1$$

Comme $S_{n+1} \rightarrow S$, la question II.1 indique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{k+1} = S$$

ce qui donne $\frac{U_{n-1} + S_1}{2^n} \rightarrow S$ ou encore $T_{n-1} = \frac{U_{n-1}}{2^{n-1}} \rightarrow 2S$. La série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

2.4. Si $a_n = (-2)^n$ alors $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge alors que $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ converge. Les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ n'ont donc pas toujours même nature.