A rendre le lundi 7 novembre

Problème

Notations.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $|z|$ son module. Pour tout entier naturel n, on note :
– $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$,
– $[|0, n|]$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$,
– $\binom{n}{k}$ le nombre de parties ayant k élément d'un ensemble de n éléments, pour $k \in [|0, n|]$.
On rappelle :
– la valeur de $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $k \in [|0, n|]$,
– la formule du binôme : si z_1 et z_2 sont des nombres complexes et n un entier naturel, alors

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$$

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note σ_n la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ et on pose $\sigma_0 = 0$.

Etude d'un procédé de sommation

Dans les parties I et II les notations utilisées sont les suivantes.
Toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ étant une suite complexe, si a est une telle suite, on utilise la notation usuelle $a(n) = a_n$. A toute suite complexe a, on associe la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

L'objet du sujet est de comparer les propriétés de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n^*$ aux propriétés de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n$.

Partie I : Deux exemples.

I.1. **Cas d'une suite constante.**

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$; on suppose que la suite a est définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha$.

I.1.1. Expliciter $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.2. Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.3. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n$ (resp. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

I.2. **Cas d'une suite géométrique.**

Soit $z \in \mathbb{C}$; on suppose que la suite a est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = z^n$.

I.2.1. Exprimer a_n^* en fonction de z et n.

I.2.2. On suppose que $|z| < 1$.

1.2.2.1. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

1.2.2.2. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.

I.2.3. On suppose que $|z| \geqslant 1$.

I.2.3.1. Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$?

I.2.3.2. Quelle est la nature de $\sum_{n\geqslant 0} a_n^*$ si $z = -2$?

I.2.3.3. On suppose $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$.

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$.

Partie II : Etude du procédé de sommation.

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que a est à valeurs réelles.

II.1. **Comparaison des convergences des deux suites.**

II.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une entier k fixé, $k \in [|0, n|]$.

II.1.1.1. Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.1.2. En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.2. Soit a une suite réelle et q un entier naturel fixé.

On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n,a) = \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n,a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

II.1.3. On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.4. On suppose que a_n tend vers l (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

II.1.5. La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

II.2. **Comparaison des convergences des séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

II.2.1. Pour $n \in [|0, 3|]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k, c'est à dire sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k$.

II.2.2. On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in [|0, n|]$:

$$(\mathcal{E}) \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}$$

II.2.2.1. A quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte-tenu des résultats obtenus à la question $II.2.1$?

II.2.2.2. Etablir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur l'entier n (on pourra remarquer que pour tout $k \in [|0, n|]$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$).

II.2.3. On suppose que la série $\sum(a_n)$ est convergente. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

II.2.4. La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n^*$?