A rendre le lundi 28 novembre

Seule la partie I est obligatoire !

PROBLEME

L'objet de ce problème est d'obtenir une méthode de calcul approché d'une intégrale.

Dans tout le problème f désigne une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

On définie la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ par $T_1 = \dfrac{b-a}{2}\Big(f(a)+f(b)\Big)$ et quel que soit $n \geqslant 2$:

$$T_n = \frac{b-a}{n}\Big(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) + \frac{1}{2}f(b)\Big).$$

Pour simplifier l'écriture on notera pour tout $k = 0 \dots n$, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Enfin, on pose $I = \displaystyle\int_a^b f$.

Partie I

1. Convergence de la suite (T_n).
   (a) Quelle est la limite de la suite (T_n) ?
   (b) Calculer : $\displaystyle\int_a^b \Big(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a) + f(a)\Big)\,dt$.
   (c) Que représente T_1 dans le cas où f est à valeurs positives ? Comment peut-on interpréter T_n ?
2. Vitesse de convergence de la suite (T_n).
   Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$.
   (a) Etablir que : $\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b (t-a)(t-b)f''(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$.
   (b) En déduire que : $\displaystyle\Big|\int_a^b f(t)\,dt - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\Big| \leqslant M_2\frac{(b-a)^3}{12}$, où $M_2 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. *On justifiera l'existence de M_2.*
   (c) Déterminer une majoration de $|I - T_n|$ en fonction de a, b, n et M_2.
3. Exemple : On prend ici $a = 0$, $b = 1$ et f définie par : $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   (a) Etablir, à l'aide de ce qui précède que pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\Big|\ln 2 - \Big(\frac{3}{4n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n+k}\Big)\Big| \leqslant \frac{1}{6n^2}$.
   (b) A partir de quelle valeur de n obtient-on ainsi une valeur de $\ln 2$ à 10^{-2} près ?

Partie II

Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit la suite B_p de polynômes par :

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $B_0(t) = 1$.

(ii) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $B_p'(t) = pB_{p-1}(t)$ et $\displaystyle\int_0^1 B_p(t)\,dt = 0$.

Enfin, on note $b_p = B_p(0)$.

1. Etude des polynômes B_p.
   (a) Déterminer les polynômes B_1, B_2 ainsi que b_1 et b_2.
   (b) Montrer que pour $p \geqslant 2$, on a $b_p = B_p(1)$.

(c) Soit $p \geqslant 1$, exprimer pour tout $k \in \{0, \ldots, p\}$, $B^{(k)}(0)$ en fonction de b_{p-k}.

(d) Etablir que, quel que soit $p \geqslant 1$, $B_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_k X^{p-k}$ avec $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$.

(e) En déduire que, pour $p \geqslant 2$, $\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} b_k = 0$.

(f) Pour $p \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on définit $\tilde{B_p}(t) = (-1)^p B_p(1-t)$. Montrer que la suite de polynômes $\tilde{B_p}$ vérifie les relations (i) et (ii). En déduire que $\tilde{B_p} = B_p$.

(g) Montrer que pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a $b_{2p+1} = 0$.

(h) Déterminer B_3 et b_4.

2. Formule d'Euler Mac Laurin : Soit $g \in \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$.

(a) Montrer l'égalité : $\int_0^1 g = \int_0^1 B_0(t)g(t)dt = \frac{1}{2}\big(g(0)+g(1)\big) - \int_0^1 B_1(t)g'(t)\,dt$.

(b) Pour $n \geqslant 2$, montrer l'égalité :

$$\frac{1}{2}\big(g(0)+g(1)\big) = \int_0^1 g(t)\,dt + \sum_{q=2}^{n} (-1)^q \frac{b_q}{q!}\big(g^{(q-1)}(1) - g^{(q-1)}(0)\big) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{B_n(t)}{n!} g^{(n)}(t)\,dt.$$

(c) En déduire que, pour $p \geqslant 1$, on a l'égalité :

$$\frac{1}{2}\big(g(0)+g(1)\big) = \int_0^1 g(t)\,dt + \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{2j!}\big(g^{(2j-1)}(1) - g^{(2j-1)}(0)\big) + \int_0^1 \frac{B_{2p+1}(t)}{2p+1!} g^{(2p+1)}(t)\,dt.$$

Partie III

Dans cette partie, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[a,b]$.

1. Formule d'Euler Mac Laurin pour f.

(a) Soit $p \geqslant 1$, en utilisant la fonction $g(t) = f(a + t(b-a))$, établir l'égalité :

$$I = \frac{(b-a)}{2}\big(f(a)+f(b)\big) - \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{2j!}(b-a)^{2j}\big(f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)\big) - \frac{(b-a)^{2p+1}}{(2p+1)!} \int_a^b B_{2p+1}\Big(\frac{x-a}{b-a}\Big) f^{(2p+1)}(x)\,dx.$$

(b) En déduire que :

$$\left| I - \frac{(b-a)}{2}\big(f(a)+f(b)\big) - \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{2j!}(b-a)^{2j}\big(f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)\big) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{2p+2}}{(2p+1)!} M_{2p+1}\beta_{2p+1},$$

avec $M_{2p+1} = \max_{x\in[a,b]} |f^{(2p+1)}(x)|$ et $\beta_{2p+1} = \max_{x\in[a,b]} |B^{(2p+1)}(x)|$.

2. Développement limité de T_n.

(a) Soit $p \geqslant 1$, montrer à l'aide de la question précédente que :

$$T_n =_{n\to+\infty} I + \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{2j!} \frac{(b-a)^{2j}}{n^{2j}} \big(f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)\big) + o\Big(\frac{1}{n^{2p}}\Big).$$

(b) Qu'obtient-on pour $p = 2$?