Correction du PROBLEME

Partie I

1. Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge.

   Pour $x > 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}x}$, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs et le critère de Riemann (puisque $\alpha + 1 > 1$), $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.

   $$\boxed{\text{Donc } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge simplement sur } [0, +\infty[.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$:

   $$f_n'(x) = \frac{1}{n^\alpha}\frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}.$$

   Donc f_n est croissante sur $[0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty[$. Comme, de plus, f_n est positive sur $[0, +\infty[$, f_n est bornée sur $[0, +\infty[$ et $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\alpha+1/2}}$.

   Donc, d'après le critère de Riemann, la série $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge normalement sur } [0, +\infty[\text{ ssi } \alpha + \frac{1}{2} > 1 \text{ ssi } \alpha > \frac{1}{2}.}$

3. Soit $0 < a < b$, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\forall x \in [a, b]$

   $$|f_n(x)| \leqslant \frac{b}{n^\alpha(1 + na^2)} = \alpha_n$$

   Donc f_n est bornée sur $[a, b]$ et $\sup_{[a,b]} |f_n| \leqslant \alpha_n$.

   De plus, $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{b}{an^{\alpha+1}}$, comme $\alpha + 1 > 1$, d'après le critère de Riemann, $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ converge.

   $\boxed{\text{Ainsi } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge normalement sur } [a, b], \text{ pour tout } \alpha > 0}.$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in [0, +\infty[$ alors d'après la question 1, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est convergente, on peut considérer son reste d'ordre n, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in [0, +\infty[$ alors, comme $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, pour $k \geqslant n + 1 \geqslant n$, on a

   $$\frac{x}{k^\alpha(1 + kx^2)} \geqslant \frac{x}{\sqrt{k}(1 + kx^2)}$$

   puisque tous les termes sont positifs et le terme de gauche reste le terme général d'une série convergente d'après la question 1 pour $\alpha = \frac{1}{2}$. On a alors

   $$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{k^\alpha(1 + kx^2)} \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{k}(1 + kx^2)}$$

   et comme tous les termes sommés sont positifs, on en déduit que :

$$\boxed{R_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{k}(1+kx^2)}.}$$

(c) Pour $k \leqslant 2n$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ on obtient pour $x \geqslant 0$, $\dfrac{x}{\sqrt{k}(1+kx^2)} \geqslant \dfrac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}$. En ajoutant ces inégalités, il vient :

$$R_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}$$

(d) Si on prend $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, on obtient

$$R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant \frac{1}{n\sqrt{2}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \geqslant \frac{1}{n\sqrt{2}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{3} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

(e) Ainsi

$$\boxed{\sup_{x\in[0,a]} |R_n(x)| \geqslant \frac{1}{3\sqrt{2}}}$$

(f) On a donc montré que $\sup\limits_{x\in[0,a]} |R_n(x)|$ ne tend pas vers zéro losque n tend vers $+\infty$.

Donc $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R}_+^*.}$

Partie II

1. A la question I.3, on a montré que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalemnt sur tout segment de $]0, +\infty[$, de plus comme pour tout n de $\mathbb{N}^*$, f_n est conitnue sur $]0, +\infty[$, on peut en déduire que $\boxed{f \text{ est continue sur }]0, +\infty[.}$

2. Pour $\alpha > \dfrac{1}{2}$, on a montré à la question I.2 que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ et comme pour tout n de $\mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0, +\infty[$, on peut en déduire que $\boxed{f \text{ est continue sur } [0, +\infty[}$.

3. L'étude de la fonction f_n à la question I.2, montre que f_n est décroissante sur $[1, +\infty[$ et positive donc f_n est bornée sur $[1, +\infty[$ et

$$\sup_{x\in[1,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(1) = \frac{1}{n^\alpha(1+n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

Donc comme $\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ est le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann, puisque $\alpha > 0$, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$, donc converge uniformément sur $[1, +\infty$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$. On en déduit d'après le théorème de la double limite que f admet une limite en $+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

4. Soit $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ et $x > 0$.

   (a) g_x est alors une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ et $g_x'(t) = -\dfrac{\alpha t^{\alpha-1}(1+tx^2) + t^\alpha x^2}{t^{2\alpha}(1+tx^2)} = -\dfrac{\alpha(1+tx^2)+tx^2}{t^{\alpha+1}(1+tx^2)^2}$.
   Donc $g_x'(t) < 0$ pour $t \in [1, +\infty[$ et donc g_x est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in [k, k+1]$, comme g_x est décroissante

   $$g_x(k) \geqslant \int_k^{k+1} g_x(t)\, dt$$

   or comme $g_x(k) = f_k(x)$, en sommant ces inégalités, on obtient

   $$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \geqslant \int_1^{n+1} g_x(t)\, dt$$

   (c) On remarque par positivité des fonctions f_n que pour tout n de $\mathbb{N}^*$

   $$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant f(x)$$

   donc

   $$\int_1^{n+1} g_x(t)\, dt \leqslant f(x).$$

   Comme la focntion g_x est positive, la suite $\left(\int_1^n g(t)\, dt\right)_n$ est croissante et d'après la question précédente elle est bornée par $f(x)$ donc elle est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n g_x(t)\, dt \leqslant f(x)$.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On peut donc effectuer le changement de variable $u = \sqrt{t}$ alors $du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ et

   $$\begin{aligned} \int_1^n \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\, dt &= \int_1^{n^2} \frac{2x}{(1+u^2x^2)}\, du \\ &= [2 \arctan(ux)]_1^{n^2} \end{aligned}$$

   Donc en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient

   $$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\, dt = \pi - 2 \arctan(x).$$

   (e) On a donc démontrer que, pour $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$

   $$f(x) \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\, dt \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\, dt = \pi - arctan(x)$$

   On remarque que $f(0) = 0$. Donc si f est continue en 0, l'inégalité précédente étant obtenue pour tout $x > 0$, en passant à la limite quand x tend vers zéro on obtient que $0 \geqslant \pi$, ce qui est absurde. Donc f n'est pas continue en 0.

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
   On a déjà calculer $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$,

   $$f_n'(x) = \frac{1}{n^\alpha} \frac{1 - nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

Soit $0 < a < b$, alors $\forall x \in [a, b]$:

$$|f_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \frac{1+nb^2}{(1+na^2)^2} = \beta_n$$

or

$$\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b^2}{n^{\alpha+1}a^4}$$

Or $\alpha > 0$ donc la série de terme général β_n converge, d'après le critère de Riemann.
On a donc montré que $\underline{\sum_{n\geqslant 1} f_n' \text{ converge normalement sur } [a, b], \text{ pour tout } 0 < a < b.}$

De plus on a déjà montré que $\underline{\sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge simplement sur }]0, +\infty[.}$

Donc d'après le théorème de dérivation termes à termes f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, pour tout $0 < a < b$, $\boxed{\text{donc } f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.}$

6. (a) On a pour $N \in \mathbb{N}^*$, $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+nx^2)} \\ & \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+nx^2)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Soit alors $A \in]0, +\infty[$, puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant A.$$

(b) Puis, comme, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+nx^2)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n}$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]0, \eta[, \quad \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n(1+nx^2)} \geqslant \frac{A}{2}$$

.

(c) On a donc :

$$\forall A > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in]0, \eta[, \quad \frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{A}{2}.$$

(d) ce qui montre que

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

(e) Comme $f(0) = 0$, on conclut que $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$