Problème : Centrale PSI 2000, I

Partie I

I.A On reconnaît le lemme de Lebesgue dont la démonstration est ici simplifiée car f est C^1 : une intégration par parties donne la conclusion cherchée :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt &= [f(t)(\frac{-\cos(xt}{x})]_a^b + \frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\cos(xt)\,dt \\ &= \frac{1}{x}\left(f(a)\cos(ax) - f(b)\cos(bx) + \int_a^b f'(t)\cos(xt)\,dt\right).\end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{x}\,|f(a)\cos(ax) - f(b)\cos(bx)| \leqslant \frac{2M}{|x|}$$

avec $M = \sup\limits_{[a,b]}|f|$ qui existe car f est continue sur le segment $[a,b]$.

De plus,

$$\left|\int_a^b f'(t)\cos(xt)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f'(t)|\,dt \leqslant M_1(b-a)$$

avec $M_1 = \sup\limits_{[a,b]}|f'|$ qui existe car f' est continue sur le segment $[a,b]$.

L'expression étant avec un facteur de $\frac{1}{x}$, on puet conclure :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt = 0}$$

I.B.1 La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\lim\limits_{t\to0^+} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} = n$ ($\sin(t) \underset{t\to0}{\sim} t$ et $\sin(nt) \underset{t\to0}{\sim} nt$) donc $t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)}$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Ceci assure l'existence de l'intégrale J_n.

I.B.2 On a clairement $\boxed{J_0 = 0;\ J_1 = \dfrac{\pi}{2};\ J_2 = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,dt = 2}$.

Puis la formule trigonométrique : $\sin(3t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$ conduit à :

$$J_3 = 3\frac{\pi}{2} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\,dt = 3\frac{\pi}{2} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos(2t))\,dt$$

et finalement $\boxed{J_3 = \dfrac{\pi}{2}}$.

I.B.3 De $\sin(nt) - \sin((n-2)t) = 2\cos((n-1)t)\sin(t)$, on tire pour $n \geqslant 2$:

$$\boxed{J_n - J_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos((n-1)\sin(t)\,dt = \frac{2}{n-1}\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)}$$

En considérant la parité de n on obtient :

- $J_n - J_{n-2} = 0$ si n est impair

- $J_n - J_{n-2} = \dfrac{2}{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}-1}$ si n est pair.

Puis par récurrence immédiate :

$$\boxed{J_n = \frac{\pi}{2} \qquad \text{si n est impair}}$$

et

$$\boxed{J_n = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2}{2k-1}(-1)^{k-1} \qquad \text{si n est pair et non nul}}$$

I.B.4 De $\sin(nt) - \sin((n-1)t) = 2\cos((n-\frac{1}{2})t)\sin(\frac{t}{2})$, on tire pour $n \geqslant 1$:

$$J_n - J_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left((n-\frac{1}{2})t\right) \frac{1}{\cos(\frac{t}{2})}\,dt.$$

Et comme la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\cos(\frac{t}{2})}$ est C^1 sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, le lemme de Lebesgue de la question I.A s'applique (la démonstration de I.A est analogue en remplaçant $\sin(xt)$ par $\cos(xt)$). En substituant à la variable x la suite $\left(x_n = n - \frac{1}{2}\right)_{n\geqslant 1}$ de limite $+\infty$ on a la limite cherchée : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(J_n - J_{n-1}) = 0}$.

D'où, puisque la suite (J_{2n-1}) est constante $(= \frac{\pi}{2})$, $\lim_{n\to+\infty}(J_{2n} = \frac{\pi}{2})$ et compte tenu des résultats du I.B.3) on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{2k-1}(-1)^{k-1} = \frac{\pi}{2},$$

après changement d'indice k par $k+1$, on retrouve la formule demandée

$$\boxed{4\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \pi}$$

I.C.1 la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)}$ est continue en tout point non multiple de π et continue par morceaux sur $[0, a]$ puisque si $k\pi$ est l'un des multiples (en nombre fini) de π dans l'intervalle $[0, a]$

$$\lim_{t\to k\pi} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} = (-1)^{(n-1)k}n \qquad (\sin(u+k\pi) \underset{u\to 0}{\sim} (-1)^k u \text{ et } \sin(n(u+k\pi)) \underset{u\to 0}{\sim} (-1)^{nk}nu).$$

Ceci assure l'existence de l'intégrale demandée.

I.C.2 On sait déja que f est C^∞ sur $]0, a]$ comme fraction en x et $\sin(x)$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Le problème à résoudre est donc le prolongement C^∞ en 0.

Sachant que l'on a les développements en série entière de rayon infinie, $\forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

et

$$\frac{\sin(x) - x}{x^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k+1)!}.$$

Le numérateur $\dfrac{\sin(x)-x}{x^2}$ est donc prolongeable par 0 en 0 et ce prolongement, développable en série entière est C^∞ sur $\mathbb{R}$. De même le dénominateur $\dfrac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement (par 1 en 0) qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Finalement comme on a posé $f(0)=0$, f coïncide sur l'intervalle $[0,a]$ avec le quotient des deux prolongements C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas, ni en 0 (il vaut 1), ni sur l'intervalle $]0,a]$ où il vaut $\frac{\sin(x)}{x}$) et $\boxed{\text{f est bien } C^\infty \text{ sur } [0,a].}$

I.C.3 Chacune des deux intégrales existant d'après I.C.1), on peut écrire :

$$\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt - \int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,dt = \int_0^a \sin(nt)f(t)\,dt$$

où f est la fonction de la question précédente. Comme f est C^∞ sur $[0,a]$, le lemme de Lebesgue de la question I.A. donne :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt - \int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,dt\right)=0}.$$

I.C.4 <u>**1er Cas : a=$\frac{\pi}{2}$**</u> D'après I.B.4 et I.C.3. $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}}$.

<u>**2ème Cas :** $0<a<\frac{\pi}{2}$</u> Par la relation de Chasles :

$$\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t}\,dt - \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t}\,dt$$

et compte tenu du 1er cas et de I.A (la fonction $t\mapsto\frac{1}{t}$ est C^1 sur l'intervalle $[a,\frac{\pi}{2}]$), on obtient la même limite : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}}$.

<u>**3ème Cas :** $a>\frac{\pi}{2}$</u> De même

$$\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t}\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt$$

et compte tenu du 1er cas et de I.A (la fonction $t\mapsto\frac{1}{t}$ est C^1 sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2},a]$), on obtient la même limite : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}}$.

I.D Soit $n\geqslant 1$, on a

$$F(n\pi)=\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt=\int_0^{\pi}\frac{\sin(nu)}{u}\,du$$

(par le changement de variable affine $t=nu$) et d'après I.C.4),

$$\lim_{n\to+\infty}F(n\pi)=\frac{\pi}{2}.$$

Pour $x\to+\infty$, soit $n=E(\frac{x}{\pi})\underset{x\to+\infty}{\to}+\infty$ (car $n>\frac{x}{\pi}-1$) de telle sorte que par la relation de Chasles :

$$F(x)=F(n\pi)+\int_{n\pi}^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{n\pi}^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt=0$ puisqu'on a la majoration

$$|\int_{n\pi}^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt|\leqslant\int_{n\pi}^{x}|\frac{\sin t}{t}|\,dt\leqslant\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\frac{\sin t}{t}|\,dt\leqslant\frac{1}{n\pi}$$

(car $|\dfrac{\sin t}{t}|\leqslant\dfrac{1}{n\pi}$ sur l'intervalle $[n\pi,(n+1)\pi]$).

D'où la limite cherchée : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}}$.

I.E L'application $t\mapsto\dfrac{\sin t}{t}$ est C^0 par morceaux sur $[0,+\infty[$; elle est intégrable sur cet intervalle si, et seulement si, $t\mapsto|\frac{\sin t}{t}|$ l'est c'est-à-dire, si, et seulement si, $\lim\limits_{X\to+\infty}\int_0^X|\frac{\sin t}{t}|\,dt$ existe.

Or par la relation de Chasles on peut écrire :

$$\int_0^{n\pi}|\frac{\sin t}{t}|\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\frac{\sin t}{t}|\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u+k\pi}\,du$$

(par les changements de variable affines : $t=u+k\pi$ et positivité de $\frac{\sin u}{u+k\pi}$ sur $[0,\pi]$).

Mais la série de terme général positif $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u+k\pi}\,du$ est divergente puisqu'on a la minoration :

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u+k\pi}\,du\geqslant\frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin u\,du=\frac{2}{(k+1)\pi}.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi}|\frac{\sin t}{t}|\,dt$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$ et on peut donc conlure que

$$\boxed{t\mapsto\frac{\sin t}{t}\text{ n'est pas intégrable sur }]0,+\infty[}.$$

Partie II

II.A L'application $t\mapsto\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n$ est C^0 par morceaux sur $[0,+\infty[$ (cf. I.C.) ; elle est intégrable sur cet intervalle car dominée, quand $t\to+\infty$, par $t\mapsto\frac{1}{t^n}$ avec $n\geqslant 2$.

II.B Intégrons I_2 par parties car $t\mapsto-\frac{1}{t}$ et $t\mapsto\sin^2 t$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, on a alors pour $\varepsilon>0$ et $X>0$

$$\begin{aligned}I_{2,\varepsilon,X}&=\int_{\varepsilon}^{X}\frac{(\sin t)^2}{t^2}\,dt\\&=\left[\frac{-1}{t}(\sin t)^2\right]_{\varepsilon}^{X}+\int_{\varepsilon}^{X}\frac{2\cos t\sin t}{t}\,dt\end{aligned}$$

et $\left[\frac{-1}{t}(\sin t)^2\right]_0^{+\infty}=0$ puisque $\frac{-1}{t}(\sin t)^2\underset{t\to0}{\sim}-t$ et $\frac{-1}{t}(\sin t)^2\underset{t\to+\infty}{=}\mathcal{O}(\frac{1}{t})$. Donc

$$I_2=\int_0^{+\infty}\frac{2\cos t\sin t}{t}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2t)}{t}\,dt.$$

Puis par le changement de variable affine $\mathcal{C}^1$ bijectif de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ $t\mapsto 2t$, on obtient :

$$\boxed{I_2=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=I_1}.$$

II.C Sur $[0,\pi]$, sin est strictement concave donc son graphe est strictement en dessous de la tangente en 0 (y=t) pour $\pi \geqslant t > 0$ et pour $t > \pi$ on a clairement $|\sin t| \leqslant 1 < \pi < t$. Et compte-tenu de la parité du sinus : $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ |\frac{\sin t}{t}| < 1$. La suite de fonctions $\left(t \mapsto \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\right)_{n\geqslant 2}$, C^0 et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ est dominée par la fonction $\varphi\ : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t \leqslant 1 \\ \frac{1}{t^2} & \text{si } 1 < t \end{cases}$ qui est visiblement C^0 et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n = 0$ et le théorème de convergence dominée s'applique : on peut permuter l'intégrale et la limite : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

II.D Par stricte positivité des intégrales des fonctions continues, on a clairement $I_n > 0$ pour n pair. On a vu que $I_1 = \frac{\pi}{2} > 0$ et pour n impair $\geqslant 3$, d'après II.A) on peut écrire :

$$I_n = \lim_{N\to+\infty} \int_0^{N\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt$$

(par la relation de Chasles) et comme au I.E) par les changements affines de variable : $t = u + k\pi$,

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi} (-1)^{nk} \left(\frac{\sin u}{u+k\pi}\right)^n du = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin u}{u+k\pi}\right)^n du$$

(n impair)

Or la suite $\left(\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin u}{u+k\pi}\right)^n du\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive et décroisssante (car c'est le cas de la suite $\left(\left(\frac{\sin u}{u+k\pi}\right)^n\right)_{k\in\mathbb{N}}$) et de limite nulle (car $0 < \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin u}{u+k\pi}\right)^n du \leqslant \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{k\pi}\right)^n du = \frac{1}{\pi^{n-1}k^n}$). La série précédente dont la somme est I_n est alternée vérifie le critère des séries alternées. Non seulement elle converge (ce qu'on savait déjà) mais sa somme I_n est du signe du premier terme : $\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^n du > 0$. Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n > 0}.$$

Partie III

III.A Calculons les premiers termes :

$$\begin{aligned} g_n^{(0)}(t) &= (\sin t)^n;\ g_n^{(1)}(t) = n\cos t(\sin t)^{n-1} \\ g_n^{(2)}(t) &= n(\sin t)^{n-2}\left((n-1)(\cos t)^2 - (\sin t)^2\right) = n(\sin t)^{n-2}\left(n(\cos t)^2 - 1\right) \end{aligned}$$

Supposons par récurrence sur k ($k \leqslant n-1$) qu'il existe un polynôme P_k tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ g_{n,k}(t) = (\sin t)^{n-k} P_k(\cos t)$, alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ g_{n,k+1}(t) &= (n-k)(\cos t)P_k(\cos t)(\sin t)^{n-k-1} - (\sin t)^{n-k+1} P_k'(\cos t) \\ &= (\sin t)^{n-k-1}\left[(n-k)(\cos t)P_k(\cos t) - (1-(\cos t)^2)P_k'(\cos t)\right] \end{aligned}.$$

Ainsi la suite de polynômes $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ définie par :
$P_0 = 1;\ P_1 = nX;\ \forall k \in [0, n-1],\ P_{k+1} = (n-k)XP_k - (1-X^2)P_k'$ convient.

Finalement $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ h_{n,k}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-k} P_k(\cos t)$, et les fonctions $(h_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n-2}$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ (cf. I.C.2 pour le problème en 0) et sont dominées par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ (car $P_k(\cos t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $k \leqslant n-2$) , donc intégrables en $+\infty$.

III.B Pour $n=2$, il n'y a qu'une seule valeur possible pour k (k=0) et pour $n>2$ et $0\leqslant k\leqslant n-3$, opérons une intégration par parties dont la partie intégrée converge (une rédaction soigneuse est obligatoire...) :

$$(n-k-1)!\int_0^{+\infty} t^{k-n}g_n^{(k)}(t)\,dt=\Big[-(n-k-2)!t^{k-n+1}g_n^{(k)}(t)\Big]_0^{+\infty}+(n-k-2)!\int_0^{+\infty} t^{k+1-n}g_n^{(k+1)}(t)\,dt.$$

Mais d'après III.A), $t^{k-n+1}g_n^{(k)}(t)=t\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-k}P_k(\cos t)$, donc : $t^{k-n+1}g_n^{(k)}(t)=\underset{t\to 0}{\mathcal{O}}(t)\to 0$ quand $t\to 0$ et $t^{k-n+1}g_n^{(k)}(t)=\underset{t\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{1}{t^{n-k-1}})\to 0$ quand $t\to+\infty$ (pour $k\leqslant n-3$, et même pour $k=n-2$ (cf III.C)) .

Finalement on a bien $\boxed{(n-k-1)!\int_0^{+\infty} h_{n,k}(t)\,dt=(n-k-2)!\int_0^{+\infty} h_{n,k+1}(t)\,dt}$, ce qui prouve l'indépendance par rapport à k variant de 0 à $n-2$ de

$$(n-k-1)!\int_0^{+\infty} h_{n,k}(t)\,dt=\int_0^{+\infty} h_{n,n-2}(t)\,dt.$$

III.C Pour $0\leqslant k\leqslant n-2$, cela découle de l'intégrabilité établie à III.A), et pour $k=n-1$, de la convergence de la partie intégrée de la question précédente (avec $k=n-2$) et de l'existence de l'intégrale du premier membre ; on obtient ainsi

$$\int_0^{+\infty} h_{n,n-2}(t)\,dt=\int_0^{+\infty} h_{n,n-1}(t)\,dt,$$

et donc compte-tenu du III.B :

$$\boxed{\forall k\in\{0..(n-1)\},\ (n-k-1)!\int_0^{+\infty} h_{n,k}(t)\,dt=\int_0^{+\infty} h_{n,n-1}(t)\,dt}$$

III.D De la définition de $h_{n,n-1}$, de I_n et de III.C) avec k=0 on déduit :

$$\boxed{I_n=\int_0^{+\infty} h_{n,0}(t)\,dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}\frac{g_n^{(n-1)}(t)}{t}\,dt}$$

III.E .

III.E.1 Il s'agit de la linéarisation des puissances entières de $\sin(t)=\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$, donc

$$\begin{aligned}
4^p(\sin t)^{2p} &= (-1)^p(e^{it}-e^{-it})^{2p}=(-1)^p\textstyle\sum_{k=0}^{2p}(-1)^kC_{2p}^ke^{2(p-k)it}\\
&= (-1)^p\left((-1)^pC_{2p}^p+2\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^kC_{2p}^k\cos(2(p-k)t)\right)\\
&\quad\text{(en isolant le terme réel où k=p}\\
&\quad\text{et en regroupant les termes conjugués associés à } k \text{ et } 2p-k)\\
&= \boxed{C_{2p}^p+2\sum_{k=1}^{p}(-1)^kC_{2p}^{p-k}\cos(2kt)}\ \text{(en changeant k en p-k)}
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
4^p(\sin t)^{2p+1} &= (-1)^p\tfrac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})^{2p+1}=(-1)^p\tfrac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^kC_{2p+1}^ke^{(2(p-k)+1)it}\\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}C_{2p+1}^k\sin((2(p-k)+1)t)\\
&\quad\text{(en regroupant les termes conjugués associés à } k \text{ et } 2p+1-k)\\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{p}(-1)^kC_{2p+1}^{p-k}\sin((2k+1)t)}\ \text{(en changeant } k \text{ en } p-k)
\end{aligned}$$

III.E.2 Sachant que

$$\frac{d^n}{dt^n}\cos(\alpha t) = \alpha^n \cos(\alpha t + n\tfrac{\pi}{2}) = \alpha^n \times \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\cos(\alpha t) \text{ si n est pair} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin(\alpha t) \text{ si n est impair} \end{cases}$$

et que de même

$$\frac{d^n}{dt^n}(\sin(\alpha t) = \alpha^n \sin(\alpha t + n\tfrac{\pi}{2}) = \alpha^n \times \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\sin(\alpha t) \text{ si n est pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos(\alpha t) \text{ si n est impair} \end{cases},$$

on obtient compte-tenu de la question précédente :

$$\begin{cases} g_{2p}^{(2p-1)}(t) = \frac{2}{4^p}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^k C_{2p}^{p-k}(2k)^{2p-1}(-1)^p\sin(2kt) \\ g_{2p+1}^{(2p)}(t) = \frac{1}{4^p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_{2p+1}^{p-k}(2k+1)^{2p}(-1)^p\sin((2k+1)t) \end{cases}.$$

Puis d'après III.D, on obtient les formules suivantes où toutes les intégrales existent (on a même par changement de variable affine $u = kt$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(kt)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}\,du = I_1$)

$$\begin{cases} I_{2p} = \dfrac{2}{4^p(2p-1)!}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^k C_{2p}^{p-k}(2k)^{2p-1}(-1)^p\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2kt)}{t}\,dt \\ \quad = \dfrac{1}{(2p-1)!}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+k}C_{2p}^{p-k}k^{2p-1}I_1 \\ I_{2p+1} = \dfrac{1}{4^p(2p)!}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_{2p+1}^{p-k}(2k+1)^{2p}(-1)^p\int_0^{+\infty}\frac{\sin((2k+1)t)}{t}\,dt \\ \quad = \dfrac{1}{(2p)!}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}C_{2p+1}^{p-k}(k+\frac{1}{2})^{2p}I_1 \end{cases}.$$

Et puisque $I_1 = \frac{\pi}{2}$: $\boxed{\begin{cases} I_{2p} = \dfrac{1}{2(2p-1)!}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+k}C_{2p}^{p-k}k^{2p-1}\right)\pi \\ I_{2p+1} = \dfrac{1}{2(2p)!}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}C_{2p+1}^{p-k}(k+\frac{1}{2})^{2p}\right)\pi \end{cases}}$.

Les cas $p = 1$, $p = 2$ donnent :

$$\boxed{I_2 = C_2^0\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2};\ I_3 = \frac{\pi}{4}\left(-C_3^1(\frac{1}{2})^2 + C_3^0(\frac{3}{2})^2\right) = \frac{3\pi}{8};\ I_4 = \frac{\pi}{12}\left(-C_4^1 + C_4^0 2^3\right) = \frac{\pi}{3}}$$

Partie IV

Dans cette partie, seuls des éléments de corrections sont données mais la rédaction n'est plus soignée....

IV.A La fonction $t \mapsto \dfrac{(\sin tx)^n}{t^n(1+t^2)}$ est C^0 sur $\mathbb{R}_+^*$, dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ donc intégrable en $+\infty$ et équivalente en 0 à $\frac{(tx)^n}{t^n} = x^n$, donc C^0 par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Finalement elle est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale proposée existe (même si n=0) .

IV.A Soit $n \geqslant 2$. L'application $\phi :\ (x,t) \mapsto \frac{(\sin tx)^n}{t^n(1+t^2)}$, par compositions et quotient de fonctions C^∞, est C^∞ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in [0,b],\ forallt \in \mathbb{R}_+^*, \quad |\phi(x,t)| \leqslant \frac{|b|^n}{1+t^2}$$

(puisque $|\sin(tx)| \leqslant |tx|$) Or $t \mapsto \dfrac{|b|^n}{1+t^2}$ est une fonction C^0 et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De même la dérivée partielle

$$(x,t) \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t) = n\frac{\cos(tx)(\sin tx)^{n-1}}{t^{n-1}(1+t^2)}$$

est C^0 sur $[0,b] \times \mathbb{R}_+^*$, dominée par $t \mapsto \frac{nb^{n-1}}{1+t^2}$ qui est C^0 et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Enfin (cf les calculs du III.A), $(x,t) \mapsto \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,t) = n\dfrac{[n(\cos tx)^2-1](\sin tx)^{n-2}}{t^{n-2}(1+t^2)}$ est C^0 sur $[0,b]\times\mathbb{R}_+^*$, dominée par $t \mapsto \dfrac{n(n+1)b^{n-2}}{1+t^2}$ (car $n-2 \geqslant 0$) qui est C^0 et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Il découle alors du théorème de dérivation sous l'intégrale avec hypothèses de domination que $x \mapsto A_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin tx)^n}{t^n(1+t^2)}\,dt$ est de classe C^2 sur tout segment $[0,b], (b>0)$ et donc sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ A_n'(x) = \int_0^{+\infty} n\frac{\cos(tx)(\sin tx)^{n-1}}{t^{n-1}(1+t^2)}\,dt, \quad A_n''(x) = \int_0^{+\infty} n\frac{[n(\cos tx)^2-1](\sin tx)^{n-2}}{t^{n-2}(1+t^2)}\,dt}$$

Pour $n=1$, la démonstration précédente s'applique pour la dérivée première mais pas pour la seconde (car $n-2<0$) ; en effet $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,t) = n\frac{-t\sin tx}{(1+t^2)}$ et la majoration précédente n'est plus valable ; A_1 sera déterminée au D) .

Pour $n=0$, $A_0(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$ est une constante.

Remarquons également que $A_n(x)$ existe pour tout réel x et qu'alors A_n à la parité de n.

Pour $n \geqslant 2$, et $x>0$ nous avons donc :

$$\begin{aligned}
& A_n''(x) - n^2A_n(x) - n(n-1)A_{n-2}(x) \\
= & \int_0^{+\infty} \frac{nt^2[n(\cos tx)^2-1](\sin tx)^{n-2} - n^2(\sin tx)^n - n(n-1)t^2(\sin tx)^{n-2}}{t^n(1+t^2)}\,dt \\
= & \int_0^{+\infty} \frac{-n^2(t^2+1)(\sin tx)^n}{t^n(1+t^2)}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{-n^2(\sin tx)^n}{t^n}\,dt \\
= & -n^2x^{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{(\sin u)^n}{u^n}\,du \text{ (chgt de variable } t = \frac{u}{x},\ avec\ x>0) \\
= & \boxed{-n^2x^{n-1}I_n}
\end{aligned}$$

Cette relation est encore vérifiée pour $x=0$, puisqu'alors le second membre ($\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-n^2(\sin tx)^n}{t^n}\,dt$) est nul comme $n^2x^{n-1}I_n$.

A_n vérifie donc sur $\mathbb{R}_+$ l'équation différentielle (E_n) pour $n \geqslant 2$.

Remarquons que le signe de x intervient dans les bornes de l'intégrale lors du dernier changement de variable et que l'équation différentielle vérifiée par A_n sur $\mathbb{R}_-$ n'est pas exactement la même - il faudrait changer $-n^2x^{n-1}I_n$ en $+n^2x^{n-1}I_n$

IV.C.1 (E_2) s'écrit : $y''-4y = 2A_0(x) - 4xI_2 = \pi - 4xI_2$. Cherchons une solution particulière de cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et avec second membre binômial sous la forme d'un binôme $ax+b$ puisque 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique $r^2-4r=0$. $-4(ax+b) = \pi - 4xI_2$ est vérifiée pour $a = I_2$ et $b = -\frac{\pi}{4}$ et la solution générale de l'équation (E_2) s'écrit : $\boxed{y = I_2x - \dfrac{\pi}{4} + \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}}$.

IV.C.2 On sait que A_2 est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}_+$ et caractérisée par les conditions initiales $A_2(0)=0$ et $A_2'(0)=0$ (cf calculs de IV.B) ; d'où les valeurs de α et β donnant A_2 sont les solutions du système : $\begin{cases} \alpha+\beta & = \frac{\pi}{4} \\ 2(\alpha-\beta) & = -I_2 \end{cases}$. Finalement on obtient $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}I_2\right)$ et $\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}I_2\right)$ d'où sur $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{A_2(x) = I_2 x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}I_2\right)e^{2x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}I_2\right)e^{-2x}}$$

IV.C.3 D'après les dominations déja rencontrées au IV.B) : $|A_2(x)| \leqslant x^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}x^2 = \underset{x\to+\infty}{\mathcal{O}}(x^2)$.
Ainsi dans l'expression de $A_2(x)$ le coefficient $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}I_2\right)$ de e^{2x} est nul sinon $A_2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha e^{2x}$ ne saurait être dominé par x^2. D'où :

$$\boxed{I_2 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ A_2(x) = \frac{\pi}{4}\left(e^{-2x} + 2x - 1\right)}$$

IV.D D'après les résultats du IV.A), dans le cas $n=1$, on obtient : $A_1'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,dt$ et pour $n=2$: $A_2''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2\cos(2tx)}{1+t^2}\,dt = 2A_1'(2x) = \frac{d}{dx}(A_1(2x))$. D'où puisque $A_1(0) = 0 = A_2'(0)$ et compte-tenu du résultat de IV.C.3) :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ A_1(x) = A_2'(\frac{x}{2}) = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-x}\right)}$$

IV.E Raisonnons de même qu'au IV.C.1) pour déterminer I_3 et A_3 :

.A - (E_3) : $y'' - 9y = 6A_1(x) - 9x^2 I_3 = 3\pi - 9x^2 I_3 - 3\pi e^{-x}$ et l'équation caractéristique associée est $r^2 - 9 = 0$.

.B - La fonction $I_3x^2 + \frac{2I_3 - 3\pi}{9} + \frac{3\pi}{8}e^{-x}$ est une solution particulière de (E_3).

.C - La solution générale de (E_3) s'écrit donc : $y = I_3x^2 + \frac{2I_3-3\pi}{9} + \frac{3\pi}{8}e^{-x} + \alpha e^{3x} + \beta e^{-3x}$

.D - Sur $\mathbb{R}_+$, A_3 est la solution de (E_3) qui vérifie les conditions initiales (cf calculs du IV.B) : $A_3(0) = A_3'(0) = 0$ ce qui conduit au système : $\begin{cases} \alpha+\beta & = -\frac{\pi}{24} - \frac{2I_3}{9} \\ \alpha-\beta & = \frac{\pi}{8} \end{cases}$. D'où $\alpha = \frac{\pi}{24} - \frac{I_3}{9}$, $\beta = -\frac{\pi}{12} - \frac{I_3}{9}$.

.E - Ainsi on obtient $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ A_3(x) = I_3x^2 + \frac{2I_3-3\pi}{9} + \frac{3\pi}{8}e^{-x} + \left(\frac{\pi}{24} - \frac{I_3}{9}\right)e^{3x} + \left(-\frac{\pi}{12} - \frac{I_3}{9}\right)e^{-3x}$.

.F - On a toujours la majoration : $|A_3(x)| \leqslant \frac{x^3\pi}{2} = \underset{x\to+\infty}{\mathcal{O}}(x^3)$, d'où $\alpha = \frac{\pi}{24} - \frac{I_3}{9} = 0$

.G - Finalement :

$$\boxed{I_3 = \frac{3\pi}{8} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ A_3(x) = \frac{\pi}{8}\left(-e^{-3x} + 3e^{-x} + 3x^2 - 2\right)}$$

IV.F *La formule demandée avec les contraintes de degré et de parité est incorrecte (les cas n=1, n=2, n=3 … en sont des contre-exemples). Il convient de supprimer le terme e^{-x} situé devant $Q_n(e^{-x})$.*
Démontrons la formule ainsi corrigée ($A_n(x) = Q_n(e^{-x}) + R_n(x)$ avec degré$(R_n) = n-1$, degré$(Q_n) = n$, R_n et Q_n ayant les parités respectives de $n-1$, n) par récurrence sur n.
Pour $n=1$, d'après IV.D) $Q_1(X) = -\frac{\pi}{2}X$ et $R_1 = \frac{\pi}{2}$ conviennent.
Pour $n=2$, d'après IV.C) $Q_2(X) = \frac{\pi}{4}(X^2-1)$ et $R_2 = \frac{\pi}{2}X$ conviennent.
Pour $n=3$, d'après IV.E) $Q_3(X) = -\frac{\pi}{8}(X^3 - 3X)$ et $R_3 = \frac{\pi}{8}(3X^2 - 2)$ conviennent.
Mais la question sur le degré de Q_n est assez délicate et nécessite un traitement à part, voire des résultats intermédiaires à établir (cette difficulté a-t-elle été vraiment voulue par le concepteur du sujet ?). Nous procéderons donc en deux étapes :

.A - Démonstration de la formule demandée mais avec la condition $\deg(Q_n) \leqslant n$ au lieu de $\deg(Q_n) = n$.

.B - Calcul explicite de Q_n et mise en évidence que son degré est bien n.

1ère étape :

L'initialisation aux rangs $n = 1, 2, 3$, a été vérifiée plus haut et remarquons que l'on peut l'étendre au rang $n = 0$ en posant $A_0(x) = Q_0(e^{-x}) = \beta_{0,0} = \frac{\pi}{2}$ et $R_0(x) = 0$.

Supposons maintenant que la propriété demandée (avec $\deg(Q_n) \leqslant n$) soit vérifiée au rang $n-2 \geqslant 0$ et écrivons $A_{n-2}(x) = Q_{n-2}(e^{-x}) + R_{n-2}(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ pair}}}^{n-2} \beta_{n-2,k}\, e^{-kx} + R_{n-2}(x)$.

L'équation (E_n) s'écrit alors : $y'' - n^2 y = n(n-1) \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ pair}}}^{n-2} \beta_{n-2,k}\, e^{-kx} + n(n-1)R_{n-2}(x) - n^2 x^{n-1} I_n$.

La technique de superposition des solutions nous permet de chercher une solution particulière sous la forme $P_n(e^{-x}) + R_n(x)$ où

.A - $P_n(e^{-x}) = \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ pair}}}^{n-2} \frac{n(n-1)}{k^2-n^2} \beta_{n-2,k}\, e^{-kx}$ est solution de $y'' - n^2 y = n(n-1) \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ pair}}}^{n-2} \beta_{n-2,k}\, e^{-kx}$

.B - $R_n(x)$ solution de $y'' - n^2 y = n(n-1)R_{n-2}(x) - n^2 x^{n-1} I_n$.

Remarquons que ce dernier second membre est un polynôme en x de degré $(n-1)$ compte-tenu de l'hypothèse de récurrence et du fait que $I_n \neq 0$ (cf II.D).

Dans l'espace vectoriel de dimension finie n des polynômes de degré au plus $(n-1)$, l'application linéaire $y \mapsto y'' - n^2 y$ est un automorphisme (par exemple sa matrice dans la base canonique est trigonale et a pour coefficients diagonaux la seule valeur propre $(-n^2 \neq 0)$; On peut donc prendre pour $R_n(x)$ un polynôme de degré (n-1), son coefficient dominant étant d'ailleurs $\boxed{I_n}$. De plus y et y" ayant le même parité, l'application $y \mapsto y'' - n^2 y$ laisse stable les deux sous-espaces supplémentairs formés des polynômes pairs (respectivement impairs) de degré au plus $(n-1)$ et induit donc pour des raisons de dimension un isomorphisme sur chacun de ses espaces. Comme le second membre à la parité de $(n-1)$ par construction et hypothèse de récurrence, on en déduit que R_n a bien la parité de $(n-1)$.

Finalement on peut écrire la solution A_n sur $\mathbb{R}_+$ sous la forme : $A_n(x) = P_n(e^{-x}) + R_n(x) + \alpha e^{nx} + \beta e^{-nx}$

Mais comme au IV.E), on a la majoration $|A_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2} x^n = \underset{x\to+\infty}{\mathcal{O}}(x^n)$ et donc $\alpha = 0$ (sinon $A_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha e^{nx}$ ce qui est contradictoire avec la majoration précédente). Soit le résultat voulu :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+,\ A_n(x) &= \beta e^{-nx} + \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ pair}}}^{n-2} \frac{n(n-1)}{k^2-n^2} \beta_{n-2,k}\, e^{-kx} + R_n(x) \\ &= Q_n(e^{-x}) + R_n(x) \\ &\quad \text{où } Q_n(X) = \beta X^n + \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ pair}}}^{n-2} \frac{n(n-1)}{k^2-n^2} \beta_{n-2,k}\, X^k \end{aligned}}$$

Les polynômes Q_n et R_n conviennent visiblement, mais remarquons qu'à ce stade le coefficient β n'est pas connu et on ne peut pas affirmer que le degré de Q_n soit exactement n. Conformément à la notation générale on pose désormais $\beta_{n,n} = \beta$.

2ème étape :

On sait d'après les calculs du IV.B) que pour $n \geqslant 2,\ A_n(0) = A_n'(0) = 0$ et donc que $Q_n(1) + R_n(0) = -Q_n'(1) + R_n'(0) = 0$, mais compte-tenu de la parité de R_n on a : $R_{2p}(0) = 0$ et $R'_{2p+1}(0) = 0$, d'où : $Q_{2p}(1) = -Q'_{2p+1}(1) = 0$, et donc selon l'écriture générale des coefficients des polynômes A_n :

$$\forall p \geqslant 1,\ \beta_{2p,2p} = -\sum_{k=0}^{p-1} \beta_{2p,2k} \text{ et } \beta_{2p+1,2p+1} = -\frac{1}{2p+1} \sum_{k=0}^{p-1} (2k+1)\beta_{2p+1,2k+1}$$

Par ailleurs l'expression de Q_n vue à la première étape donne les relations de récurrence suivantes en distinguant les cas n pair $(= 2p \geqslant 2)$ et n impair $(= 2p+1 \geqslant 3)$:

$\forall p \geqslant (k+1),\ \beta_{2p,2k} = \frac{2p(2p-1)}{4(k-p)(k+p)} \beta_{2(p-1),2k}$ et $\beta_{2p+1,2k+1} = \frac{2p(2p+1)}{4(k-p)(k+p+1)} \beta_{2p-1,2k+1}$

On obtient immédiatement par récurrence sur $p \geqslant k+1$:

$$
\begin{array}{rcl}
\beta_{2p,2k} & = & \left(\prod_{r=k+1}^{p} \frac{2r(2r-1)}{(k-r)(k+r)}\right)(-4)^{k-p}\beta_{2k,2k} = \frac{(2p)!}{(2k)!}\frac{(2k)!}{(p-k)!(p+k)!}(-4)^{k-p}\beta_{2k,2k} \\
\boxed{\beta_{2p,2k}} & = & \boxed{(-4)^{k-p}C_{2p}^{p-k}\beta_{2k,2k}} \qquad \text{et} \\
\beta_{2p+1,2k+1} & = & \left(\prod_{r=k+1}^{p} \frac{2r(2r+1)}{(k-r)(k+r+1)}\right)(-4)^{k-p}\beta_{2k+1,2k+1} = \frac{(2p+1)!}{(2k+1)!}\frac{(2k+1)!}{(p-k)!(p+k+1)!}(-4)^{k-p}\beta_{2k+1,2k+1} \\
\boxed{\beta_{2p+1,2k+1}} & = & \boxed{(-4)^{k-p}C_{2p+1}^{p-k}\beta_{2k+1,2k+1}}
\end{array}
$$

Ainsi tous les coefficients du polynôme Q_n sont connus dès que les coefficients $(\beta_{k,k})_{0\leqslant k\leqslant n-2}$ le sont ; et ce sont justement ceux dont on doit montrer la non nullité !

Au vu des premiers coefficients : $\beta_{1,1} = -\frac{\pi}{2}$, $\beta_{2,2} = \frac{\pi}{4}$, $\beta_{3,3} = -\frac{\pi}{8}$ on peut "raisonablement" conjecturer que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \beta_{n,n} = (-1)^n \frac{\pi}{2^n}}$$

Enfin remarquons le cas particulier de $\beta_{0,0} = \frac{\pi}{2}$ qui ne rentre pas dans la forme précédente.

Nous allons démontrer cette formule par récurrence sur p en distinguant les cas n pair (=2p) et n impair (=2p+1).

Cas n =2p $(\geqslant 2)$

La formule est vérifiée au rang $p = 1$ et supposons qu'elle le soit jusqu'au rang $p - 1 \geqslant 1$, alors d'après les relations établies ci-dessus :

$$
\begin{array}{rcl}
\beta_{2p,2p} & = & -\sum_{k=0}^{p-1}\beta_{2p,2k} = -\sum_{k=0}^{p-1}(-4)^{k-p}C_{2p}^{p-k}\beta_{2k,2k} \\
 & & \text{et compte-tenu de l'hypothèse de récurrence en distinguant le cas } k=0 \\
 & = & -\sum_{k=1}^{p-1}(-4)^{k-p}C_{2p}^{p-k}\frac{\pi}{2^{2k}} - (-4)^{-p}C_{2p}^{p}\frac{\pi}{2} \\
 & = & -\frac{\pi}{2^{2p}}\left(\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-k}C_{2p}^{p-k} + \frac{(-1)^p}{2}C_{2p}^{p}\right) \\
 & = & -\frac{\pi}{2^{2p}}\left(\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k}C_{2p}^{k} + \frac{(-1)^p}{2}C_{2p}^{p}\right) \text{ (en changeant k en p-k)} \\
 & = & -\frac{\pi}{2^{2p}}\left(\sum_{k=p+1}^{2p-1}(-1)^{k}C_{2p}^{k} + \frac{(-1)^p}{2}C_{2p}^{p}\right) \text{ (en changeant k en 2p-k, sachant que } C_{2p}^{2p-k} = C_{2p}^{k}) \\
 & = & -\frac{\pi}{2^{2p+1}}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{2p-1}(-1)^{k}C_{2p}^{k} + (-1)^pC_{2p}^{p}\right) \text{ (par demi-somme des deux derniers résultats)} \\
 & = & -\frac{\pi}{2^{2p+1}}\sum_{k=1}^{2p-1}(-1)^{k}C_{2p}^{k} = -\frac{\pi}{2^{2p+1}}\left(\sum_{k=0}^{2p}(-1)^{k}C_{2p}^{k} - 2\right) \\
 & = & \boxed{\frac{\pi}{2^{2p}}} \text{ (car } \sum_{k=0}^{2p}(-1)^kC_{2p}^k = (1-1)^{2p} = 0 \text{ pour } p \geqslant 1)
\end{array}
$$

Ce qui achève la récurrence et on peut écrire :

$$\boxed{\forall p \geqslant 1 :\ \beta_{2p,2p} = \frac{\pi}{4^p} \neq 0 \text{ et } Q_{2p}(X) = \frac{\pi}{4^p}\left(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}C_{2p}^{p-k}X^{2k} + \frac{(-1)^p}{2}C_{2p}^{p}\right)}$$

Cas n =2p+1 $(\geqslant 1)$

On procède de même : La formule est vérifiée au rang $p = 0$ et supposons qu'elle le soit jusqu'au rang $p - 1 \geqslant 0$, alors d'après les relations établies ci-dessus :

$$
\begin{aligned}
\beta_{2p+1,2p+1} &= -\tfrac{1}{2p+1}\sum_{k=0}^{p-1}(2k+1)\beta_{2p+1,2k+1} = -\tfrac{1}{2p+1}\sum_{k=0}^{p-1}(2k+1)(-4)^{k-p}C_{2p+1}^{p-k}\beta_{2k+1,2k+1}\\
&\quad \text{et compte-tenu de l'hypothèse de récurrence}\\
&= \tfrac{1}{2p+1}\sum_{k=0}^{p-1}(-4)^{k-p}(2k+1)C_{2p+1}^{p-k}\tfrac{\pi}{2^{2k+1}}\\
&= \tfrac{\pi}{2^{2p+1}(2p+1)}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}(2k+1)C_{2p+1}^{p-k}\\
&= \tfrac{\pi}{2^{2p+1}(2p+1)}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k}(2p-2k+1)C_{2p+1}^{k}\ \text{(en changeant k en p-k)}\\
&= \tfrac{\pi}{2^{2p+1}(2p+1)}\sum_{k=p+1}^{2p}(-1)^{k+1}(-2p+2k-1)C_{2p+1}^{k}\ \text{(en changeant k en 2p+1-k)}\\
&= \tfrac{\pi}{2^{2p+2}(2p+1)}\sum_{k=1}^{2p}(-1)^{k}(2p-2k+1)C_{2p+1}^{k}\ \text{(par demi-somme des deux derniers résultats)}\\
&= \tfrac{\pi}{2^{2p+2}(2p+1)}\Big(\sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^{k}(2p+1-2k)C_{2p+1}^{k}-(2p+1)-(2p+1)\Big)\\
&= \boxed{-\frac{\pi}{2^{2p+1}}}\\
&\quad \Big(\text{car } \sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^{k}(2p+1)C_{2p+1}^{k}=(2p+1)(1-1)^{2p+1}=0 \text{ et } kC_{2p+1}^{k}=(2p+1)C_{2p}^{k-1}\\
&\quad \text{donc } \sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^{k}kC_{2p+1}^{k}=\sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^{k}(2p+1)C_{2p}^{k-1}=(2p+1)(1-1)^{2p}=0\Big)
\end{aligned}
$$

Ce qui achève la récurrence et on peut écrire :

$$\boxed{\forall p \geqslant 0 :\ \beta_{2p+1,2p+1} = -\frac{\pi}{2^{2p+1}} \neq 0 \text{ et } Q_{2p+1}(X) = \frac{\pi}{2^{2p+1}}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+1-k}C_{2p+1}^{p-k}X^{2k+1}}$$