A rendre le lundi 16 janvier

PROBLEME

Définitions et notations

On note $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions définies et continues dans l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles.

Pour f et g éléments de E, on pose $\langle f, \rangle g = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, ce qui définit sur E un produit scalaire dont la norme associée est notée $||.||$ (on rappelle que $||f|| = \sqrt{\langle f, f, \rangle}$) et munit E d'une structure d'espace préhilbertien réel.

On dit qu'une suite $\Phi = (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est orthonormale si elle vérifie la condition ,

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad \langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ 1 & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

.

Soit Φ une suite orthonormale de E.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, on désigne par V_Φ^n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{\Phi_j,\ 0 \leqslant j \leqslant n\}$, par Π_Φ^n l'opérateur de projection orthogonale de E sur V_Φ^n et enfin par d_Φ^n la distance de $f \in E$ à V_Φ^n.
2. On désigne par V_Φ le sous-espace vectoriel de E réunion des V_Φ^n : $V_\Phi = \cup_{n\in\mathbb{N}} V_\Phi^n$;
   par définition est égal à l'ensemble des éléments de E qui sont combinaisons linéaires **finies** d'éléments de la famille, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Phi_{j_i}$ où $j_1, j_2, \ldots, j_p$ sont des entiers et $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_p$ des coefficients réels.
3. On dit que la suite orthonormale Φ est totale dans E si pour tout élément f de E il existe une suite d'éléments de V_Φ convergeant vers f.

Enfin pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose

$$C_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ \sqrt{2}\cos(n\pi x) & \text{si} \quad n > 0 \end{cases} \quad ; \quad S_n(x) = \sqrt{2}\sin((n+1)\pi x),$$

et on note $C = (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$et $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La partie III est largement indépendante des deux parties précédentes.

Partie I - Généralites sur les suites orthonormales

I.A - Montrer que C et S sont des suites orthonormales de E.

I.B - Soit Φ une suite orthonormale de E, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$.

I.B.1 Etablir la formule $||f||^2 = ||\Pi_\Phi^n(f)||^2 + [d_\Phi^n(f)]^2$.

I.B.2 Calculer

$$\sup_{f\in E, ||f||=1} ||\Pi_\Phi^n(f)||.$$

I.B.3 Expliciter $\Pi_\Phi^n(f)$ dans la base $\{\Phi_j \, 0 \leqslant j \leqslant n\}$.
En déduire que la série de terme général $\langle f, \Phi_k\rangle^2$ est convergente et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \langle f, \Phi_k\rangle^2 \leqslant ||f||^2.$$

I.C - On suppose toujours que Φ est une suite orthonormale de E.

I.C.1 Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de V_Φ, convergeant dans E et soit $f = \lim\limits_{k\to+\infty} f_k$, c'est à dire $||f - f_k|| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

a) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$ donné, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad n \geqslant N \Rightarrow \{f - \Pi_\Phi^n(f) = f - f_k + \Pi_\Phi^n(f_k - f)\}$$

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||\Pi_\Phi^n(f) - f|| = 0$.

I.C.2 Démontrer alors l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
i) Φ est totale dans E.
ii) $\forall f \in E, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} ||\Pi_\Phi^n(f) - f|| = 0$.

I.C.3 **On suppose de plus dans cette question seulement** que Φ est totale dans E.
Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$ expliciter $||f||^2$ et $[d_\Phi^n(f)]^2$ à l'aide des $\langle f, \Phi_k\rangle$.

I.D - **Etude de la suite** C

I.D.1 Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe une unique fonction continue paire périodique et de période 2 notée $\tilde{f}$ telle que sa restriction à $[0,1]$ soit égale à f.

I.D.2 (Question réservée aux 5/2 car elle fait appel aux séries de Fourier.)
Montrer alors que la suite définie dans le préambule est totale dans E.
On pourra introduire les coefficient de Fourier de la fonction 2π-périodique h définie par $h(x) = \tilde{f}(\frac{x}{\pi})$, la fonction $\tilde{f}$ étant celle de la question précédente.

I.D.3 Exhiber une suite orthonormale de E non totale dans E.

Partie II - Fonctions lipschitziennes

On note I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Une fonction f définie dans I et à valeurs réelles est dite lipschitzienne dans I si elle vérifie la condition :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \, \forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(-y)| \leqslant C|x - y|,$$

On notera $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions réelles définies et lipschitziennes dans I.

II.A - **Propriétés élémentaires.**

II.A.1 Vérifier que $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
Le produit de deux éléments de $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ est-il encore un élément de $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$?
Si $f \in \mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ justifier l'existence du réel $k(f)$ défini par

$$k(f) = \sup\left\{\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right|, \, (x,y) \in I^2, \, x \neq y\right\}.$$

Ce réel sera appelé la constante de Lipschitz de f.

II.A.2 Si I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, vérifier que $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. Exhiber une fonction définie et continue sur $[0,1]$ mais non lipschitzienne sur ce même intervalle.

II.B - Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Montrer que f est lipschitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur I.
Exprimer dans ce cas la constante de Lipschitz à l'aide de f'.

II.C - Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ qui converge simplement sur I vers une fonction f. On suppose de plus que l'ensemble des $\{k(f_n),\, n\in\mathbb{N}\}$ est borné.
Montrer que $f\in\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$.

II.D - Soit $g\in\mathrm{Lip}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $k(g)\leqslant 1$.

II.D.1 Montrer qu'il existe $\widehat{g}\in\mathrm{Lip}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :

$$k(\widehat{g})\leqslant 1 \quad\text{et}\quad \forall x\in[0,1]\quad g(x)=\widehat{g}(x).$$

(a) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$ on pose $g_n(x)=n\displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{n}}\widehat{g}(t)\,dt$.
Montrer que g_n est de classe sur $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à dérivée bornée par 1.
Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\widehat{g}$.

II.E - Dans les deux dernières questions de cette partie les suites S et C sont celles définies dans le préambule.
Soit $f\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

II.E.1 Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $\langle f,C_n\rangle$ en fonction de $\langle f',S_{n-1}\rangle$.

II.E.2 Montrer que la série de terme général $n^2\langle f,C_n\rangle$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\langle f,C_n\rangle^2\leqslant\frac{1}{\pi^2}||f'||^2.$$

II.F - Soit $f\in\mathrm{Lip}([0,1],\mathbb{R})$.

II.F.1 Montrer que la série de terme général $n^2\langle f,C_n\rangle$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\langle f,C_n\rangle^2\leqslant\frac{1}{\pi^2}k(f)$$

II.F.2 En deduire alors que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ d_C^{n-1}(f)\leqslant\dfrac{1}{n\pi}k(f)$.

Partie III - Constantes de Lipschitz des polynômes de Legendre

Le but de cette derniere partie est le calcul des constantes de Lipschitz d'une suite orthonormale d'éléments de E constituée de polynômes.

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$ on note :

$$U_n(x)=(x^2-1)^n,\quad P_n=U_n^{(n)},\quad L_n=\frac{1}{2^n n!}P_n.$$

La notation $f^{(n)}$ représente la dérivée n-ième de la fonction f.

On démontre, et on admettra, que l'on a :

$$\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2,\ \int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{si}\quad m\neq n\\ \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1} & \text{si}\quad m=n\end{cases}$$

III.A - Montrer qu'il existe une unique suite de réels tous strictement positifs notée $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R},\, Q_n(x) = \alpha_n L_n(2x-1)$$

est une suite orthonormale de E.

Donner la valeur de α_n pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Dans la suite, la notation Q_n désigne l'élément ainsi calculé.

III.B -

III.B.1 Soit $f \in E$ donné. Montrer que la suite $\left(d_Q^n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

III.B.2 Montrer que la suite Q définie ci-dessus est totale dans E.

Pour cela on pourra montrer que la suite $\left(d_Q^n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, en appliquant le théorème de Weierstrass à la fonction $f \in E$ donnée.

III.B.3 Déterminer toutes les suites orthonormales $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E possédant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \Phi_n \text{ est une fonction polynomiale de degré } n$$

III.C - Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-1)^k (x+1)^{n-k}.$$

III.D - Soient $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

La lettre θ désigne une variable réelle.

III.D.1 Démontrer que si $|x| \leqslant 1$ alors

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)^n \, d\theta.$$

On pourra remarquer que

$$x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta = \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}}e^{i\theta}\right)\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}}e^{-i\theta}\right)$$

III.D.2 Etablir que

$$\max_{x\in[-1,1]} |L_n(x)| = 1.$$

Quelles sont les valeurs de $x \in [-1, 1]$ telles que $|L_n(x)| = 1$?

III.E -

III.E.1 En remarquant que $(x^2-1)U_n'(x) = 2nxU_n(x)$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

On pourra utiliser la formule de Leibniz

III.E.2 Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R}, \quad L_{n+1}'(x) = xL_n'(x) + (n+1)L_n(x).$$

III.F - Calculer enfin la valeur $k(Q_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.