

PROBLEME, CCP PSI 2007

Partie I : Calculs de déterminants.

1.1 On a

$$a_{1,1} = \binom{p}{p}, a_{1,n-p+1} = \binom{n}{p}, a_{n-p+1,1} = \binom{n}{n}, a_{1,n-p+1} = \binom{2n-p}{n}$$

1.2 On a

$$\begin{aligned} d_n &= \det(1) = 1 \\ d_{n-1} &= \det \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & n+1 \end{pmatrix} = 1 \\ d_{n-2} &= \det \begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 & n+1 & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

ce dernier résultat résultant d'un calcul au brouillon non reporté.

1.3.1 On sait que $\binom{\beta}{\alpha} + \binom{\beta}{\alpha+1} = \binom{\beta+1}{\alpha+1}$ que l'on va utiliser sous la forme

$$\binom{\beta+1}{\alpha+1} - \binom{\beta}{\alpha} = \binom{\beta}{\alpha+1}$$

En notant $A'_p = (a'_{i,j})$ la nouvelle matrice, la formule précédente donne (on doit distinguer le cas de la première colonne)

$$\forall i \geq 2, a'_{i,1} = 0 \text{ et } a'_{i,j} = \binom{p+i+j-3}{p+i-1}$$

1.3.2 Les opérations effectuées laissant le déterminant invariant, on a $\det(A_p) = \det(A'_p)$. En effectuant un développement par rapport à la première colonne, on obtient

$$d_p = \det(A'_p) = \det \left(\binom{p+i+j-3}{p+i-1} \right)_{2 \leq i, j \leq n-p+1}$$

En opérant un changement d'indice ($i' = i - 1$ et $j' = j - 1$) ceci s'écrit

$$d_p = \det \left(\binom{p+1+i'+j'-2}{p+1+i'-1} \right)_{1 \leq i', j' \leq n-(p+1)+1} = d_{p+1}$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall p \in [0, n], d_p = d_n = 1$$

2.1 On a

$$\begin{aligned} D_0 &= | 1 | = 1, D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 24 \end{vmatrix} = 4 \\ \Delta_0 &= | 1 | = 1, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

2.2 Comme $\binom{i+j}{i} = \frac{(i+j)!}{i!j!}$, on peut factoriser chaque ligne de Δ_n par $\frac{1}{i!}$ puis chaque colonne par $\frac{1}{j!}$. Le déterminant étant multilinéaire, on a alors

$$\Delta_n = \left(\prod_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)^2 D_n$$

2.3 On a

$$\Delta_n = \left(\binom{i+j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n} = \left(\binom{i'+j'-2}{i'-1} \right)_{1 \leq i', j' \leq n+1} = d_0 = 1$$

et donc

$$D_n = \prod_{k=0}^n (k!)^2$$

Partie II : Matrices de Gram.

A.1.1 Un calcul matriciel donne immédiatement

$${}^t X_i C X_j = c_{i,j}$$

A.1.2 Si C est nulle alors ${}^t X C Y$ est nul pour tout choix de X et Y .

Réciproquement, si ceci a lieu c'est vrai en particulier pour les X_i et la question précédente donne la nullité de tous les $c_{i,j}$ c'est à dire de C .

A.2 Avec des notations évidentes, on a

$$(x|y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \mid \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i (e_i | e_j) y_j$$

Par ailleurs,

$${}^t X A Y = \sum_{i=1}^n x_i (A Y)_i = \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{i,j} y_j$$

Par définition de A , on a donc

$$(x|y) = {}^t X A Y$$

A.3.1 Comme $P = \text{Mat}(\text{Id}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$, on a

$$X = P X'$$

A.3.2 D'après A.2, on a

$${}^t X A Y = (x|y) = {}^t X' A' Y'$$

Compte-tenu de la question précédente, on en déduit que

$${}^t X' {}^t P A P Y' = {}^t X' A' Y'$$

Comme ceci a lieu pour tout choix de X' et Y' , la question A.1 donne

$$A' = {}^t P A P$$

A.3.3 Si on a \mathcal{B}' orthonormale alors $A' = I_n$ et on obtient ${}^t P A P = I_n$.

A.3.4 On choisit \mathcal{B}' orthonormale (une telle base existe). On a alors, en passant au déterminant

$$\det(P)^2 \det(A) = \det(I_n) = 1$$

Comme $\det(P)^2 > 0$, on a donc $\det(A) > 0$.

A.3.5 Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une famille libre de E et F l'espace engendré par ces vecteurs. Le produit scalaire sur E induit un sur F qui est donc préhilbertien. La matrice $B = ((\varepsilon_i | \varepsilon_j))$ correspond alors à la matrice A précédente et $\det(B) > 0$.

B.1.1 On a

$$\det(M) = \begin{vmatrix} \|u_1\|^2 & (u_1|u_2) \\ (u_1|u_2) & \|u_2\|^2 \end{vmatrix} = \|u_1\|^2 \|u_2\|^2 - (u_1|u_2)^2$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cette quantité est positive.

B.1.2 D'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\det(M) = 0$ si et seulement si (u_1, u_2) liée. La famille est donc libre si et seulement si $\det(M) \neq 0$ (et dans ce cas $\det(M) > 0$).

B.2. On a

$$(M X)_i = \sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^n x_j (u_i | u_j)$$

Par linéarité par rapport à la seconde variable du produit scalaire, on en déduit que

$$(M X)_i = (u_i | v)$$

B.3. On en déduit que

$${}^t X M X = \sum_{i=1}^n x_i (M X)_i = \sum_{i=1}^n x_i (u_i | v) = (v | v) = \|v\|^2$$

cette fois par linéarité par rapport à la première variable du produit scalaire.

B.4. M étant symétrique réelle est diagonalisable dans \mathbb{R} et toutes ses valeurs propres sont réelles. Soit λ une telle valeur propre. Il existe $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. La question précédente donne

$$\lambda \|X\|^2 = {}^t X M X = \|v\|^2 \geq 0$$

et comme $\|X\|^2 > 0$, on a donc $\lambda \geq 0$.

B.5. Si $MX = 0$ alors $\|v\|^2 = {}^t X M X = 0$ et donc $v = 0$.

Réciproquement, on suppose que $v = 0$. D'après la question B.2 tous les coefficients de MX sont nuls et donc $MX = 0$.

B.6. On suppose M inversible. Supposons $\sum_{i=1}^n x_i u_i = 0$; on a alors $MX = 0$ où X est la matrice unicolonne de coordonnées x_i . Comme M est inversible, ceci implique que $X = 0$ et donc que $\forall i \in [1, n]$, $x_i = 0$. La famille (u_1, \dots, u_n) est donc libre.

Partie III : Application en dimension 3.

1. Le discriminant du polynôme vaut

$$4 \cos^2(\beta) \cos^2(\gamma) + 4 - 4 \cos^2(\beta) - 4 \cos^2(\gamma) = 4(1 - \cos^2(\gamma))(1 - \cos^2(\beta)) = (2 \sin(\beta) \sin(\gamma))^2$$

On en déduit que les racines de P sont

$$\cos(\beta) \cos(\gamma) - \sin(\beta) \sin(\gamma) = \cos(\beta + \gamma)$$

$$\cos(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\beta) \sin(\gamma) = \cos(\beta - \gamma)$$

2. On a

$$\det(G(u_1, u_2, u_3)) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha) & \cos(\gamma) \\ \cos(\alpha) & 1 & \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) & \cos(\beta) & 1 \end{vmatrix}$$

Un développement par rapport à la première colonne donne

$$\det(G(u_1, u_2, u_3)) = -(\cos^2(\alpha) - 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) - 1) = -P(\cos(\alpha))$$

et donc

$$\det(G(u_1, u_2, u_3)) = -(\cos(\alpha) - \cos(\beta + \gamma))(\cos(\alpha) - \cos(\beta - \gamma))$$

3. Le déterminant précédent est positif et le produit $(\cos(\alpha) - \cos(\beta + \gamma))(\cos(\alpha) - \cos(\beta - \gamma))$ est donc négatif. $\cos(\alpha)$ doit donc être compris entre $\cos(\beta - \gamma)$ et $\cos(\beta + \gamma)$.

4. Le déterminant est nul si et seulement si $\cos(\alpha) = \cos(\beta + \gamma)$ ou $\cos(\alpha) = \cos(\beta - \gamma)$.

- Comme $\alpha, \beta - \gamma \in [0, \pi]$, la seconde égalité implique $\alpha = \beta - \gamma$ ou encore $\alpha + \gamma = \beta$. Comme $0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha$ on a alors $\gamma = 0$ et $\alpha = \beta$ et donc $\alpha = \beta + \gamma$.

- Comme $\alpha \in [0, \pi]$ et $\beta + \gamma \in [0, 2\pi]$, la première égalité implique $\alpha = \beta + \gamma$ ou $\alpha = 2\pi - \beta - \gamma$.

Si le déterminant est nul on a donc $\alpha = \beta + \gamma$ ou $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$. La réciproque est immédiate.

5.1. On a

$$\det(G(u_1, u_2, u_3) - xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & c & c \\ c & 1-x & c \\ c & c & 1-x \end{vmatrix} = -(x-1-2c)(x-1+c)^2$$

Les valeurs propres de $G(u_1, u_2, u_3)$ sont donc $1 + 2c$ et $1 - c$.

5.2. Comme les valeurs propres de $G(u_1, u_2, u_3)$ sont positives (II.B.4) on a donc $c \geq -\frac{1}{2}$. Il est par ailleurs possible que c prenne cette valeur (quand les trois vecteurs sont coplanaires, u_2 et u_3 s'obtenant par rotation d'angle $2\pi/3$ et $4\pi/3$ du vecteur u_1).

$-1/2$ est donc la plus petite valeur possible pour c .

5.3.1 Comme $c = -1/2$, $G(u_1, u_2, u_3) = 0$ et la famille (u_1, u_2, u_3) est liée. On est dans la situation évoquée à la question précédente et

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

5.3.2 On a $G(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ qui est de rang au moins 2 (deux premières colonnes libres).

Son noyau est de dimension au plus 1. Comme $(1, 1, 1)$ est dans le noyau de $G(u_1, u_2, u_3)$, on a donc

$$\text{Ker}(G(u_1, u_2, u_3)) = \text{Vect}((1, 1, 1))$$

D'après II.B.5 on a $v = u_1 + u_2 + u_3$ qui est nul.

Partie IV : Distance à un sous-espace.

1.1. Dans $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n))$, la dernière colonne puis la dernière ligne se factorisent par λ . Par multilinéarité du déterminant vis à vis des lignes ou colonnes, on a donc

$$\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n)) = \lambda^2 \det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n))$$

1.2. Dans $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1))$, on fait l'opération élémentaire (qui laisse le déterminant invariant) $L_n \leftarrow L_n - \lambda L_1$. On fait alors la même opération sur la n -ième colonne du déterminant obtenu. On obtient alors

$$\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n \lambda v_1)) = \det(G(v_1, \dots, v_n))$$

2.1. w étant orthogonal à F est orthogonal à tous les v_i . $G(v_1, \dots, v_n, w)$ s'écrit donc, par blocs, $\begin{pmatrix} G(v_1, \dots, v_n) & 0 \\ 0 & \|w\|^2 \end{pmatrix}$ et ainsi (déterminant bloc-diagonal ou développement par rapport à la dernière colonne)

$$\det(G(v_1, \dots, v_n, w)) = \|w\|^2 \det(G(v_1, \dots, v_n))$$

2.2. Soit $p(v)$ le projeté orthogonal de v sur F (qui existe car F est de dimension finie) et $w = v - p(v)$. Comme $w \in F^\perp$, la question précédente donne

$$\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n, w)) = \|w\|^2 \det(G(v_1, \dots, v_n))$$

Le cours indique que $d(v, F) = \|w\|$ et on a donc montré que

$$\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n, v - p(v))) = (d(v, F))^2 \det(G(v_1, \dots, v_n))$$

Par ailleurs $p(v) \in F$ s'écrit $p(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. En itérant le résultat de la question IV.1.2 (où v_1, \dots, v_{n-1} jouent des rôles symétriques) on a donc

$$\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v)) = (d(v, F))^2 \det(G(v_1, \dots, v_n))$$

3.1. $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}^+ (seul problème d'intégrabilité au voisinage de l'infini) et négligeable devant $1/t^2$ au voisinage de l'infini (croissances comparées). C'est donc une fonction intégrable sur \mathbb{R} . Une intégration par parties donne

$$\int_0^a t^{k+1} e^{-t} dt = [-t^{k+1} e^{-t}]_0^a + (k+1) \int_0^a t^k e^{-t} dt$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}, J_{k+1} = (k+1)J_k$$

Comme $J_0 = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$, une récurrence immédiate donne

$$\forall k \in \mathbb{N}, J_k = k!$$

3.2. On a alors

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, (e_i | e_j) = J_{i+j} = (i+j)!$$

3.3. La question IV.2.2 donne alors

$$d(e_n, \mathbb{R}_{n-1}[X])^2 = \frac{D_n}{D_{n-1}} = (n!)^2$$

et on a montré que

$$d(e_n, \mathbb{R}_{n-1}[X]) = n!$$