EXERCICE, Extrait CCP PSI 2010

1. (a) On remarque que φ_0 est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $H = \text{Ker } \varphi_0$ donc H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, $\boxed{\text{c'est donc un sev de } \mathbb{R}_n[X] \text{ dimension } n.}$

   (b) La famille $(X - a_0, (X - a_0)^2, \ldots, (X - a_0)^n)$ est une famille libre car échelonnée en degré et chaque élément appartient à H, elle possède de plus n éléments qui est la dimension de H, donc c'est une base de H.

   (c) $1 \notin H$ donc $\text{Vect }(1) \cap H = \{0\}$ et $\dim(H) + \dim \text{Vect }(1)) = n + 1$,
   $\boxed{\text{donc Vect } (1) \text{ est un supplémentaire de } H \text{ dans } \mathbb{R}_n[X].}$

2. On pose $\forall j \in [|0, n|]$,
$$P_j(X) = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}.$$
$\boxed{\text{On a alors } \forall (i, j) \in [|0, n|],\ \varphi_i(P_j) = \delta_i^j.}$

3. Montrons que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre :
   il suffit de considérer $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$. Soit $j \in \{0, \ldots, n\}$, en regardant l'égalité précédente en x_j, on obtient $\lambda_j P_j(x_j) = 0$ or $P_j(x_j) = 1$ donc $\lambda_j = 0$.
   De plus $card(P_0, \ldots, P_n) = n + 1$ et $\forall j \in [|0, n|]$, P_j est de degré n donc appartient à $\mathbb{R}_n[X]$.
   $\boxed{\text{Elle est donc libre et possède } n+1 \text{ éléments, c'est une base de } \mathbb{R}_n[X],}$ et par construction $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ est sa base duale.

4. (a) On pose $\boxed{P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} f(a_j) P_j}$, alors par construction $\forall i \in [|0, n|]$, $P(a_i) = f(a_i)$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ car $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Supposons qu'il existe P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$
$$\forall i \in [|0, n|],\ P(a_i) = f(a_i) \text{ et } Q(a_i) = f(a_i).$$
   Alors, $\forall i \in [|0, n|]$, $(P - Q)(a_i) = 0$, donc le polynôme $P - Q$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ qui possède $n + 1$ racines distinctes, c'est donc le polynôme nul. Ainsi $P = Q$ et $\boxed{P \text{ est unique.}}$

PARTIE I : Quelques calculs préliminaires.

1. On remarque que
$$A+I_3=\begin{pmatrix}3&-3&3\\-3&4&-4\\-3&4&-4\end{pmatrix}\ \text{ et }\ A-2I_3=\begin{pmatrix}0&-3&3\\-3&1&-4\\-3&4&-7\end{pmatrix}$$
On a alors en notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de $A+I_3$:
$$(C_1,C_2)\text{ libres et }C_2+C_3=0$$
donc $\mathrm{rg}(A+I_3)=2$ et d'après le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}\ (A+I_3)=1$, de plus $(0,1,1)\in \mathrm{Ker}\ (A+I_3)$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}\ (A+I_3)=\mathrm{Vect}\ ((0,1,1)).}$
On a alors en notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de $A-2I_3$:
$$(C_1,C_2)\text{ libres et }-C_1+C_2+C_3=0$$
donc $\mathrm{rg}(A-2I_3)=2$ et d'après le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}\ (A-2I_3)=1$, de plus $(-1,1,1)\in \mathrm{Ker}\ (A-2I_3)$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}\ (A-2I_3)=\mathrm{Vect}\ ((-1,1,1)).}$
2. On a $\dim \mathrm{Ker}\ (A+I_3)+\dim \mathrm{Ker}\ (A-2I_3)=2\neq \dim \mathbb{C}^3$
$\boxed{\text{donc on n'a pas } \mathrm{Ker}\ (A+I_3)\oplus \mathrm{Ker}\ (A-2I_3)=\mathbb{C}^3.}$
3. Le calcul donne
$$(A+I_3)^2=9\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$
C'est une matrice de rang 1 (colonnes toutes proportionnelles à la première) et $(1,1,0),(0,1,1)$ sont des éléments indépendants du noyau. Par le théorème du rang, ce noyau est de dimension 2 et donc $\boxed{\mathrm{Ker}\ ((A+I_3)^2)=Vect((1,1,0),(0,1,1))}$.
4. On a $\dim \mathrm{Ker}\ (A+I_3)^2+\dim \mathrm{Ker}\ (A-2I_3)=3=\dim \mathbb{C}^3$, il suffit alors de vérifier que $\mathrm{Ker}\ (A+I_3)^2\cap \dim \mathrm{Ker}\ (A-2I_3)=\{0\}$ ou encore que que la concaténée des bases de ces sous-espace donne une base de $\mathbb{C}^3$. On forme donc
$$\tilde{P}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$
Comme $\det(Q)=1$, Q est inversible et on a bien
$\boxed{\mathrm{Ker}\ ((A+I_3)^2)\oplus \mathrm{Ker}\ (A-2I_3)=\mathbb{C}^3}$.
5. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canonique associé à A et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$. $\mathrm{Ker}\ ((u+Id)^2)$ étant de dimension 2, il possède un élément ε_2 qui n'est pas dans le noyau de $u+Id$, par exemple $\varepsilon_2=(1,1,0)_{\mathcal{B}}$. Si on pose $\varepsilon_1=(u+I_d)\varepsilon_2$ on obtient un élement non nul du noyau de $u+Id$ et $\varepsilon_1=(1,0,0)_{\mathcal{B}}$. Cet élément n'est pas colinéaire à ε_2 (qui n'est pas dans ce noyau) et $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est libre dans $\mathrm{Ker}\ ((u+Id)^2)$. On note enfin $\varepsilon_3=(-1,1,1)_{\mathcal{B}}$ un élément non nul de $\mathrm{Ker}\ (u-2Id)$. Avec la question précédente, $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$ et, par construction
$$u(\varepsilon_1)=-\varepsilon_1,\ u(\varepsilon_2)=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ u(\varepsilon_3)=2\varepsilon_3$$
L'endomorphisme u est, dans cette base représenté par $\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. A est donc semblable à cette matrice : $A=PTP^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

6. Un calcul rapide sur les premières puissances de T permet d'intuiter que

$$T^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^{k-1}k & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

   On le montre alors facilement par récurrence.

7. Soit $m \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{T^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} & \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{m} \frac{(2)^k}{k!} \end{pmatrix}$$

   or $Sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j!}$ donc en passant à la limite sur chacun des termes on obtient :

$$\boxed{\alpha(T) = \begin{pmatrix} e^{-1} & e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.}$$

PARTIE II : Quelques propriétés de la matrice $J(0)$.

1. Les $(n-1)$ premières colonnes de $J(0)$ sont clairement indépendantes (échelonnées). La dernière est nulle et donc combinaison des $n-1$ premières. $\boxed{\text{Le rang de } J(0) \text{ vaut donc } n-1.}$
2. Soit j l'endomorphisme canoniquement associé à J et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
   (a) On a alors

$$\forall l \in [|1 \ldots n-1|],\ j(e_l) = e_{l+1} \quad \text{et} \quad j(e_n) = 0$$

   On en déduit alors, en itérant, que pour $k \in [|1 \ldots n-1|]$,

$$\forall l \in [|1 \ldots n-k|],\ j^k(e_l) = e_{l+k} \quad \text{et} \quad \forall l \in [|n-k+1 \ldots n|],\ j^k(e_l) = 0$$

   On en déduit que $J(0)^k = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & \vdots \\ 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ où la diagonale de 1 commence sur la ligne $k+1$. On peut aussi écrire que

$$\forall i, j \in [|1 \ldots n|],\ (J(0)^k)_{i,j} = \delta_{j+k,j}$$

   On remarque que cei est encore valable si $k = 0$ (on obtient alors la matrice I_n).
   On en déduit aussi que $j^n(e_l) = 0$ pour tout l et que donc $J(0)^n = O_n$ et donc (on continue à multiplier par $J(0)$ et on obtient toujours la matrice nulle) : $\boxed{\forall k \geqslant n,\ J(0)^k = O_n}$

   (b) Soit $k \geqslant 1$. $(J(0)^k)^n = J(0)^{nk} = O_n$ car $nk \geqslant n$. $\boxed{J(0)^k \text{ est donc nilpotente.}}$

3. Dans la somme définissant $\alpha(J(0))$, il n'y a qu'un nombre fini de matrices non nulles et on vient de les calculer :
$$\alpha(J(0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{1!} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix} = (v_{i,j}) \text{ avec } v_{i,j} = 0 \text{ si } i \leqslant j-1 \text{ et } \frac{1}{(i-j)!} \text{ si } i \geqslant j.$$
$U = \alpha(J(0)) - I_n$ est la même matrice où l'on a remplacé les 1 diagonaux par des zéros.
4. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. On peut trouver des entiers p et q tels que $A^p = B^q = O_n$. Soient α, β deux scalaires. Comme A et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme pour obtenir
$$(\alpha A + \beta B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} \alpha^k \beta^{p+q-k} A^k B^{p+q-k}$$
Si $k \geqslant p$, $A^k = A^p A^{k-p}$ est nulle et si $k \leqslant p$ alors $p+q-k \geqslant q$ et c'est alors B^{p+q-k} qui est nulle. Ainsi, tous les termes de la somme sont nuls et $(A+B)^{p+q} = O_n$. $\boxed{\alpha A + \beta B \text{ est nilpotente.}}$
On en déduit par récurrence que pour tout p, une combinaison linéaire de p matrices nilpotentes qui commutent deux à deux est encore une matrice nilpotente.
5. On a
$$U = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} J^k$$
qui est une combinaison linéaire de matrices nilpotentes qui commutent deux à deux. Avec la question précédente, $\boxed{U \text{ est nilpotente}}$.
Les $n-1$ premières colonnes de U sont indépendantes (famille "échelonnée" dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$) et la dernière est nulle (et donc combinaison des précédentes). $\boxed{U \text{ est donc de rang } n-1.}$

PARTIE III : Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

1. Soient $i, j \in \mathbb{N}$, on a
$$\forall x \in E,\ u^{i+j}(x) = u^j(u^i(x))$$
Si $u^i(x) = 0$ alors $u^{i+j}(x) = u^j(0) = 0$ et on a donc l'inclusion $\boxed{\text{Ker } (u^i) \subset \text{Ker } (u^{i+j})}$.
2. En particulier, la suite $(\text{Ker } (u^m))_{m \in \mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion et, en passant aux dimension, la suite $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée par la dimension de E, elle converge. Et comme elle est constituée d'entiers, elle est stationnaire à partir d'un certain rang. Il existe donc un entier m_0 tel que $t_{m_0} = t_{m_0+1}$ et l'ensemble $\{m \in \mathbb{N}/\ t_m = t_{m+1}\}$ est donc non vide. Comme il est inclus dans $\mathbb{N}$, il possède un minimum (ce qui est mieux qu'une borne inférieure). $\boxed{\text{On peut poser } r = \min\{m \in \mathbb{N}/\ t_m = t_{m+1}\}}$.
3. Par définition de r, si $m < r$ alors $t_m \neq t_{m+1}$. On a donc Ker $(u^m) \subset$ Ker (u_{m+1}) et les sous-espaces n'ayant pas même dimension, l'inclusion est stricte.
r étant un minimum, on a $t_r = t_{r+1}$. Comme Ker $(u^r) \subset$ Ker (u_{r+1}) et comme on a égalité des dimensions, on a donc Ker $(u^r) =$ Ker (u_{r+1}).
Enfin, on montre par récurrence sur l'entier m que l'affirmation
$$\text{Ker } (u^m) = \text{Ker } (u^{m+1})$$
est vraie pour tout $m \geqslant r$.
- Initialisation : on a vu que le résultat était vrai pour $m = r$.
- Etape de récurrence : soit $m \geqslant r$ tel que le résultat est vrai jusqu'au rang m. Soit $x \in$ Ker (u^{m+2}) ; on a $u^{m+1}(u(x)) = 0$ et donc $u(x) \in$ Ker (u^{m+1}). Par hypothèse de récurrence, Ker $(u^m) =$ Ker (u_{m+1}) et donc $u^m(u(x)) = 0$ c'est à dire $x \in$ Ker (u^{m+1}). On a prouvé que Ker $(u^{m+2}) \subset$ Ker (u_{m+1}) et comme l'inclusion réciproque a déjà été prouvée, on a l'égalité et le résultat au rang $m+1$.

PARTIE IV : Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$.

1. (a) Soit $x \in \text{Im }(w)$ alors il existe $y \in \text{Im }(v^p)$ tel que $x = v^q(y)$ et $y \in \text{Im }(v^p)$ donc il existe $z \in E$ tel que $y = v^p(z)$ alors $x = v^q(v^p(z)) = v^{p+q}(z)$ et $x \in \text{Im }(v^{p+q})$.

   Ainsi, $\text{Im }(w) \subset \text{Im }(v^{p+q})$, l'autre inclusion est évidente, donc on a $\boxed{\text{Im}(w) = \text{Im}(v^{p+q}).}$

   (b) Soit $x \in \text{Ker }(w)$, alors $x \in \text{Im}(v^p)$ et $w(x) = 0$ c'est à dire à $x \in \text{Im}(v^p)$ et $v^q(x) = 0$. On a donc $\boxed{\text{Ker }(w) = \text{Im}(v^p) \cap \text{Ker }(v^q) \subset \text{Ker }(v^q)}$

   (c) D'après le théorème du rang,

   $$\dim(\text{Im}(w)) + \dim(\text{Ker }(w)) = \dim(\text{Im}(v^p))$$

   En utilisant les deux questions précédentes, on a donc

   $$\dim(\text{Im}(v^p)) \leqslant \dim(\text{Ker }(v^q)) + \dim(\text{Im}(v^{p+q}))$$

   Le théorème du rang donne aussi

   $$\dim(\text{Im}(v^p)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker }(v^p))$$
   $$\dim(\text{Im}(v^{p+q})) = \dim(E) - \dim(\text{Ker }(v^{p+q}))$$

   En injectant ces relations dans l'inégalité, on obtient
   $\boxed{\dim(\text{Ker }(v^{p+q})) \leqslant \dim(\text{Ker }(v^p)) + \dim(\text{Ker }(v^q))}$

   (d) On prouve le résultat demandé par récurrence sur i.
   - Initialisation : le résultat est vrai pour $i = 1$ car v est de rang $n-1$ et donc $\dim(\text{Ker }(v)) = 1$ (l'inégalité est une égalité).
   - Etape de récurrence : soit $i \in [1..n-1]$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang i. La question précédente indique que

     $$\dim(\text{Ker }(v^{i+1})) \leqslant \dim(\text{Ker }(v^i)) + \dim(\text{Ker }(v))$$

     Comme Ker (v) est de dimension 1 et comme le résultat est vrai au rang i, on a donc

     $$\dim(\text{Ker }(v^{i+1})) \leqslant i + 1$$

     ce qui prouve le résultat au rang $i+1$.

   (e) v étant nilpotente, on a $v^n = 0$ et $\dim(\text{Ker }(v^n)) = n$. D'après la partie III, la suite $(\dim(\text{Ker }(v^i)))_{i \in \mathbb{N}}$ commence par croître strictement puis stationne à la valeur n. D'après la question précédente, elle ne peut donc pas stationner avant le rang n et on a

   $$1 = \dim(\text{Ker }(v)) < \dim(\text{Ker }(v^2)) < \cdots < \dim(\text{Ker }(v^n)) \leqslant n$$

   Pour que ces inégalité puissent avoir lieu, on doit nécessairement avoir $\boxed{\forall i \in [1..n],\ \dim(\text{Ker }(v^i)) = i}$.

2. Comme Ker (v^{n-1}) est de dimension $n-1$, il n'est pas égal à E et $v \neq \theta$.

3. Il existe donc $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$. Montrons que $(e, v(e), \dots, v^{n-1}(e))$ est libre. Pour cela, on suppose que

   $$\alpha_0 e + \alpha_1 v(e) + \cdots + \alpha_{n-1} v^{n-1}(e) = 0$$

   On a bien sur $v^k = \theta$ pour tout $k \geqslant N$.
   En composant par v^{n-1}, on a alors $\alpha_0 v^{n-1}(e) = 0$ et donc $\alpha_0 = 0$.
   Si on compose par v^{n-2}, on obtient de même $\alpha_1 = 0$. C'est donc un processus récurrent qui nous permet de montrer la nullité de tous les α_i.
   La famille est libre et possède $n = \dim(E)$ éléments : $\boxed{\text{c'est une base de } E.}$

4. $\boxed{\text{La matrice de } v \text{ dans cette base est tout simplement } J(0).}$

5. Si v et w sont deux endomorphismes nilpotents de rang $n-1$ alors il existe des bases dans lesquelles $\boxed{\text{ces deux endomorphismes sont représentés par } J(0).}$ Les matrices de ces endomorphismes sont donc semblables (transitivité de la relation de similitude).