

## Correction Devoir surveillé III - PSI

## EXERCICE

On appelle  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $A$  et  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

1.  $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ . Donc  $\text{rg}(A - 3I_3) = 1$  donc d'après le théorème du rang  $\dim \text{Ker}(A - 3I_3) = 2$  donc 3 est valeur propre de  $A$  d'ordre au moins 2, avec  $\text{Ker}(f - 3Id) = \text{Vect}(2e_1 + e_2, e_1 + 2e_3)$ .

$A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ . Ici les colonnes 1 et 2 sont linéairement indépendantes et par contre le somme des colonnes est nulle, donc  $\text{rg}(A - 6I_3) = 2$  donc d'après le théorème du rang  $\dim \text{Ker}(A - 6I_3) = 1$  donc 6 est valeur propre de  $A$  d'ordre au moins 1, avec  $\text{Ker}(f - 6Id) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$ .

On a donc  $\dim E_3(A) + \dim E_6(A) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$  donc  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  avec la relation  $A = PDP^{-1}$

où  $D$  est la matrice donnée par l'énoncé et  $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

2. Soit  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $X^2 = A$  alors  $XA = XX^2 = X^2X = AX$  donc  $X$  commute avec  $A$ .
3. Comme  $X$  et  $A$  commutent,  $f$  et  $g$  commutent.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ . Montrons que  $E_\lambda(f)$  est stable par  $g$ .

Soit  $x \in E_\lambda(f)$ , alors  $f(x) = \lambda x$ .

Mais alors,

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f \circ g(x) \\ &= g \circ f(x), \quad \text{car } f \text{ et } g \text{ commutent} \\ &= g(\lambda x), \quad \text{car } f(x) = \lambda x \\ &= \lambda g(x) \end{aligned}$$

Donc  $g(x) \in E_\lambda(f)$ .

$E_\lambda(f)$  est stable par  $g$ .

4. On note  $\mathcal{B}'$  la base de vecteurs propres de  $f$  déterminée à la question 1 :  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  avec  $\text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = E_3(f)$  et  $\text{Vect}(\varepsilon_3) = E_6(f)$ .

Comme  $f$  et  $g$  commutent, les sous-espaces propres de  $f$  sont stables par  $g$ , donc la matrice de  $g$  dans la base

$\mathcal{B}'$  est de la forme  $\Delta = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$  ..

On a donc  $\Delta \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $\Delta = P^{-1}XP$ . Alors

$$\begin{aligned} X^2 = A &\iff (P\Delta P^{-1})^2 = A \\ &\iff P\Delta^2 P^{-1} = A \\ &\iff P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} \\ &\iff \Delta^2 = D, \text{ en multipliant à gauche par } P^{-1} \text{ et à droite par } P \end{aligned}$$

$$X^2 = A \iff \Delta^2 = D \iff \begin{cases} a^2 + bc = 3 \\ b(a + d) = 0 \\ c(a + d) = 0 \\ d^2 + bc = 3 \\ e^2 = 6 \end{cases}$$

On peut alors distinguer 4 cas.

1er cas :  $b = c = 0$  alors  $a = \pm\sqrt{3}$ ,  $d = \pm\sqrt{3}$  et  $e = \pm\sqrt{6}$ . On a alors 8 solutions différentes pour  $\Delta$  donc pour  $X$  aussi.

2ème cas :  $b = 0$  et  $c \neq 0$ , alors  $a = -d = \pm\sqrt{3}c$  est quelconque et  $e = \pm\sqrt{6}$ . On a alors une infinité de solutions pour  $\Delta$  donc pour  $X$  aussi.

3ème cas :  $b \neq 0$  et  $c = 0$ , alors  $a = -d = \pm\sqrt{3} b$  est quelconque et  $e = \pm\sqrt{6}$ . On a alors une infinité de solutions pour  $\Delta$  donc pour  $X$  aussi.

4ème cas :  $b \neq 0$  et  $c \neq 0$ , alors  $a = -d$ ,  $a^2 + bc = 3$  et  $e = \pm\sqrt{6}$ . On a alors une infinité de solutions pour  $\Delta$  donc pour  $X$  aussi.

Conclusion : L'équation  $X^2 = A$  admet une infinité de solutions.

## PROBLEME I, Extrait E3A PSI

### PARTIE I

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $V_n = \sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k)$ . Alors par définition la série  $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$  converge ssi la suite  $(V_n)_{n \geq 1}$  converge.

Or pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $V_n = v_{n+1} - v_1$  donc la suite  $(V_n)_{n \geq 1}$  converge ssi la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge puisque ces deux suites diffèrent seulement d'une constante.

Ainsi, la série  $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$  converge ssi la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

2. Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n$ .

(a) Soit  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi le terme général de la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  est un grand  $O$  du terme général d'une série absolument convergentes d'après le critère de Riemann, donc la série est absolument convergente.

(b) En utilisant la question 1, on a immédiatement le résultat.

Conclusion : La suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente. On note  $\gamma$  sa limite.

3. Etude de  $h$

(a)  $h$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  comme composée et quotient de fonctions dérivables sur le même intervalle.  
On a :  $\forall t \in ]0, +\infty[$

$$h'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$$

Le dérivée de  $h$  s'annule pour  $t = e$  et  $h$  est croissante sur  $]0, e]$  et décroissante sur  $[e, +\infty[$ .

(b)  $\forall n \geq 3$ , et  $\forall t \in [n, n+1]$ ,  $t \geq 3$  donc  $h(t) \leq h(n)$  et donc

$$\int_n^{n+1} h(t) dt \leq \int_n^{n+1} h(n) dt$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt &\leq \frac{\ln n}{n}(n+1-n) \\ &\leq \frac{\ln n}{n} \end{aligned}$$

$\forall n \geq 3$ , et  $\forall t \in [n, n+1]$ ,  $t \geq e$  donc  $h(t) \geq h(n+1)$  et donc

$$\int_n^{n+1} h(t) dt \geq \int_n^{n+1} h(n+1) dt$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt &\geq \frac{\ln(n+1)}{n+1}(n+1-n) \\ &\geq \frac{\ln(n+1)}{n+1} \end{aligned}$$

On a donc montré que  $\forall n \geq 3$ ,  $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq \frac{\ln(n)}{n}$ .

(c) On pose pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \frac{\ln n}{n}$  alors d'après la monotonie de  $h$  la suite  $(v_n)_{n \geq 3}$  est décroissante et converge vers 0 par croissance comparée. De plus  $\forall n \geq 3$ ,  $v_n \geq 0$ , donc la série  $\sum_{n \geq 3} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$  vérifie le critère des séries alternées donc est elle convergente.

Or la série  $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$  est de même nature que la série  $\sum_{n \geq 3} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ ,

donc 

la série  $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$  est convergente.

## Partie II : Calcul de $S$ .

1. Etude de la suite  $(a_n)_{n \geq 3}$ .

(a) Soit  $n \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= t_{n+1} - \frac{(\ln n)^2}{2} - t_n + \frac{(\ln n)^2}{2} \\ &= t_{n+1} - t_n - \frac{\ln(n+1)^2 - \ln(n)^2}{2} \\ &= \frac{\ln n + 1}{n+1} - \frac{\ln(n+1)^2 - \ln(n)^2}{2} \end{aligned}$$

Or on remarque que :

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt = \left[ \frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_n^{n+1} = \frac{(\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2}{2}$$

or d'après la question **I.3 b**), en utilisant l'inégalité au rang  $n+1$  on a

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt.$$

Donc

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n+1)^2 - \ln(n)^2}{2} \leq 0.$$

Ainsi pour tout  $n \geq 3$ ,  $a_{n+1} - a_n \leq 0$  et 

la suite  $(a_n)_{n \geq 3}$  est décroissante.

(b) On a  $\forall k \geq 3$ ,

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \frac{\ln k}{k}$$

Soit en sommant ces inégalités de  $k = 3$  à  $n$  :

$$\forall n \geq 3, \quad \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \sum_{k=3}^n \frac{\ln(k)}{k}$$

soit

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} \leq \sum_{k=3}^n \frac{\ln(k)}{k}$$

Ainsi

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} \leq t_n - \frac{\ln(2)}{2}$$

Or  $a_n = t_n - \frac{\ln^2(n)}{2}$ , donc

$$a_n \geq \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} + \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln^3(2)}{2} \geq \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln^3(2)}{2}$$

Ainsi, la suite  $(a_n)_{n \geq 3}$  est minorée par  $\frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln^3(2)}{2}$

(c) Par les deux questions précédentes, la suite  $(a_n)_{n \geq 3}$  est minorée et décroissante donc convergente vers un réel  $l$ .

2. Soit  $n \geq 3$  :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{2j} \frac{\ln(2j)}{2j} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{2j+1} \frac{\ln(2j+1)}{2j+1} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\ln(2j)}{2j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\ln(2j+1)}{2j+1} \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \frac{\ln(2j)}{2j} - \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{\ln(2j+1)}{2j+1} + \frac{\ln(2j)}{2j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\ln(2j)}{j} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\ln 2 + \ln j}{j} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= \ln 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^n \frac{\ln j}{j} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} \\ &= \ln 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + t_n - t_{2n} \end{aligned}$$

3. On a alors, en remarquant que pour  $n \geq 3$ ,  $a_n + \frac{(\ln n)^2}{2} = t_n$  :

$$\begin{aligned}
 S_{2n} &= \ln 2 \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) + \ln 2 \ln n + a_n + \frac{(\ln n)^2}{2} - a_{2n} - \frac{(\ln 2n)^2}{2} \\
 &= u_n \ln 2 + a_n - a_{2n} + \ln n \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln(2n))^2 \\
 &= u_n \ln 2 + a_n - a_{2n} + \ln n \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln n)^2 \\
 &= u_n \ln 2 + a_n - a_{2n} + \ln n \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}((\ln 2)^2 + 2 \ln 2 \ln n + (\ln n)^2) \\
 &= u_n \ln 2 + a_n - a_{2n} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2.
 \end{aligned}$$

4. Comme la suite  $(a_n)_{n \geq 3}$  est convergente,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - a_{2n} = 0$ . D'autre part, on sait d'après la première question que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente vers  $\gamma$  donc on obtient que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \ln 2 \times \gamma - \frac{1}{2} \ln^2 2.$$

5. Or la suite  $(S_{2n})_{n \geq 3}$  est une suite extraite de la suite  $(S_n)_n$  et comme on a démontré que la suite  $(S_n)_n$  était convergente, la suite  $(S_{2n})_{n \geq 3}$  converge vers la même limite que la suite  $(S_n)_n$ , de plus comme

$$S = \sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k} \quad \text{car } \ln 1 = 0$$

on obtient

$$S = \ln 2 \left( \gamma - \frac{1}{2} \ln 2 \right).$$

**PROBLEME II, E3A PSI 2005**

$u \in L(E)$  de matrice  $U = (u_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$  base  $B$ ,  $U$  non inversible.

$e$  désigne l'endomorphisme identité de  $E$ .

**Partie I**

1.  $U$  et  $u$  sont de même rang.  $u$  est non inversible, donc non injective et il existe un élément  $x$  non nul dans  $\text{Ker } u$  qui vérifie  $u(x) = 0$ .

2. Soit alors  $x = (x_1, \dots, x_n)_B$  vecteur non nul de  $\text{Ker } u$ . Il existe  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tel que  $\|x\|_\infty = |x_i|$ . La  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de  $u(x)$  dans  $B$  est  $\sum_{j=1}^n u_{i,j}x_j$ .

Comme  $u(x) = 0$ , on a en particulier :  $-u_{i,i}x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n u_{i,j}x_j$ .

$$\text{Et donc : } |u_{i,i}| \times \|x\|_\infty = |u_{i,i}| \times |x_i| = \left| \sum_{j=1, j \neq i}^n u_{i,j} \times x_j \right| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |u_{i,j}| \times |x_j|.$$

3. Pour tout  $j$ ,  $|x_j| \leq \|x\|_\infty$ , donc  $|u_{i,i}| \|x\|_\infty \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |u_{i,j}| \|x\|_\infty$  et comme  $\|x\|_\infty \neq 0$  on a bien trouvé  $i$  tel

$$\text{que : } |u_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |u_{i,j}|.$$

4. Comme  $4 > 1$  et  $4 > 3$ , la condition précédente n'est pas réalisée pour la matrice  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

Elle est donc inversible. ( On dit que la matrice est à diagonale strictement dominante).

**Partie II**

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  représenté dans la base  $B$  par la matrice  $M$  de  $M_n(\mathbb{R})$  telle que  $M = (m_{i,j})$  où :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad m_{i,j} = \begin{cases} -2 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Soit  $n \geq 3$ .

En développant le déterminant par rapport à sa première ligne on obtient :

$$D_n = D_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

en développant le deuxième déterminant par rapport à sa première colonne.

On obtient ainsi une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 avec les conditions initiales  $D_1 = 2$  et  $D_2 = 3$ . Le polynôme caractéristique associé est  $P(X) = X^2 - 2X + 1$  qui admet une racine double égale à 1

Ainsi,  $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = (\lambda n + \mu)1^n$ .

Alors comme  $D_1 = 2\lambda + \mu = 2$  et  $D_2 = 3\lambda + \mu = 3$ . On a donc à résoudre la système  $\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 2\lambda + \mu = 3 \end{cases}$

Alors

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Conclusion,  $\forall n \in \mathbb{N}, D_n = (n + 1)$ .

2. (a)  $M$  est une matrice symétrique réelle, ses valeurs propres  $M$  sont réelles.

On pose :  $M = -2I_n + T$ , avec  $g$  l'endomorphisme de  $E$  associé à la matrice  $T = (t_{i,j})$ . On a :  $g = f + 2e$ .

(b)  $\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow f - \lambda Id$  non inversible  $\Leftrightarrow g - (\lambda + 2)Id$  non inversible  $\Leftrightarrow (\lambda + 2) \in \text{Sp}(g)$ .

Comme  $f(x) = \lambda x \Leftrightarrow g(x) = (\lambda + 2)x$ , on a  $\text{Ker}(f - \lambda Id) = \text{Ker}(g - (\lambda + 2)Id)$ .

3. (a) Soit  $\mu \in \text{Sp}(T)$ . La matrice  $T - \mu I_n$  est non inversible. D'après la question 3 de la partie I :

$$\text{il existe } i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ tel que } |t_{i,i} - \mu| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |t_{i,j}|.$$

(Les éléments de  $T - \mu I_n$  sont ceux de  $T$  sauf les éléments diagonaux égaux à  $t_{i,i} - \mu$ ).

(b) Les éléments  $t_{i,i}$  diagonaux de  $T$  sont tous nuls, et dans chaque ligne de  $T$  tous les éléments sont nuls sauf un ou deux égaux à 1.

Pour le  $i$  déterminé dans la question précédente, on a donc  $|\mu| \leq 2$  ou  $1$  donc  $|\mu| \leq 2$ .

La restriction de la fonction cosinus à  $[0, \pi]$  réalise une bijection strictement décroissante de cet intervalle dans  $[-1, 1]$ . Comme  $\mu/2 \in [-1, 1]$ , il existe  $\alpha \in [0, \pi]$  tel que  $\mu = 2 \cos \alpha$ .

4. La question consiste à rechercher un  $\alpha \in [0, \pi]$  et une suite complexe  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \text{ et } x_{n+1} = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, x_{k-1} - 2x_k \cos \alpha + x_{k+1} = 0 \end{cases}$$

(a) Le vecteur représenté dans la base  $B$  par  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  est vecteur propre de  $T$  pour la valeur propre

$\mu = 2 \cos \alpha$  si et seulement si il est non nul et vérifie  $TX = \mu X$ . On obtient donc le système :

$$\begin{cases} -\mu x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_{k-1} - \mu x_k + x_{k+1} = 0 \text{ pour tout entier } k \text{ de } \{2, \dots, n-1\}. \\ x_{n-1} - \mu x_n = 0 \end{cases}$$

En imposant les conditions  $x_0 = 0$  et  $x_{n+1} = 0$  on a l'équivalence :

$$TX = \mu X \iff \forall k \in \{1, \dots, n\}, x_{k-1} - \mu x_k + x_{k+1} = 0$$

On est donc amené à déterminer des suites qui vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

(b) Si  $\alpha = 0, \mu = 2$ .

Le polynôme caractéristique de la relation est  $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ .

Les suites  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  solution sont définies par :

$$\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall k \in \mathbb{N}, x_k = (ak + b) \times 1^k = ak + b$$

Mais  $x_0 = x_{n+1} = 0 \Rightarrow b = 0$  et  $a(n+1) + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$ .

D'où  $TX = 2X \Rightarrow X = (x_1, \dots, x_n) = (0)$ . On ne peut donc trouver de vecteur propre associé à  $\mu = 2$ .

De même si  $\alpha = \pi, \mu = -2$ . Le polynôme caractéristique de la relation est  $X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2$ .

Les suites  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  solution sont définies par :

$$\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall k \in \mathbb{N}, x_k = (ak + b) \times (-1)^k$$

Mais  $x_0 = x_{n+1} = 0 \Rightarrow b = 0$  et  $a(n+1) + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$

D'où  $TX = 2X \Rightarrow X = (x_1, \dots, x_n) = (0)$ . On ne peut donc trouver de vecteur propre associé à  $\mu = -2$ .

(c) Soit donc  $\alpha \in ]0, \pi[$ .

Le polynôme caractéristique de la relation est  $X^2 - 2 \cos \alpha X + 1$ , de discriminant

$$\Delta = 4 \cos^2 \alpha - 4 = -4 \sin^2 \alpha = (2i \sin \alpha)^2$$

Les racines sont donc  $\frac{2 \cos \alpha - 2i \sin \alpha}{2} = e^{-i\alpha}$  et  $\frac{2 \cos \alpha + 2i \sin \alpha}{2} = e^{i\alpha}$ .

Les suites complexes  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  solution de la relation de récurrence sont définies par :

$$\exists (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2, \forall k \in \mathbb{N}, x_k = c_1 e^{ik\alpha} + c_2 e^{-ik\alpha}$$

Un vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n)$  solution de  $g(x) = 2 \cos \alpha x$  vérifie  $TX = 2 \cos \alpha X$ . Il existe donc deux éléments de  $\mathbb{C}$ ,  $c_1, c_2$  tels que :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, x_k = c_1 e^{ik\alpha} + c_2 e^{-ik\alpha}$$

(d) En utilisant les notations précédentes,  $x_0 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$  et  $x_{n+1} = 0 \Rightarrow c_1 e^{i(n+1)\alpha} + c_2 e^{-i(n+1)\alpha} = 0$ .  
On obtient  $c_1 (e^{i(n+1)\alpha} - e^{-i(n+1)\alpha}) = 0 = 2ic_1 \sin(n+1)\alpha$ .

Si  $\sin(n+1)\alpha \neq 0$  on a  $c_1 = c_2 = 0$  et le seul vecteur qui vérifie  $TX = 2 \cos \alpha X$  est le vecteur nul. Dans ce cas  $2 \cos \alpha$  n'est pas valeur propre.

Les valeurs possibles pour  $\alpha$  sont solution de  $\sin(n+1)\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{n+1}; k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Comme } \alpha \in ]0, \pi[, \text{ les valeurs possibles sont } \alpha_j = \frac{j\pi}{n+1}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

(e) Réciproquement, pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $\mu_j = 2 \cos(\alpha_j)$ .

D'après ce qui précède la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_0 = 0, x_1 = a \in \mathbb{R}^*$  et la relation,

$\forall k \in \mathbb{N}^*, x_{k-1} - \mu_j x_k + x_{k+1} = 0$ , admet pour terme d'indice  $n+1$   $x_{n+1} = 0$ .

Le vecteur  $x = (a, x_2, \dots, x_n)$  est élément de  $E$  car les  $x_k$  sont tous réels et il est non-nul. D'après les questions précédentes

il vérifie  $g(x) = \mu_j x$  et donc  $\mu_j$  est valeur propre de  $g$  (et donc de  $T$ ).

(f) Comme la fonction  $\cos$  est strictement monotone sur  $]0, \pi[$ , les  $\mu_j$  sont  $n$  valeurs propres distinctes. Comme l'espace est de dimension  $n$ ,  $g$  et  $T$  sont diagonalisables, les espaces propres sont tous de dimension 1.

(g) Pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ , une suite  $(x_k)$  vérifiant la relation de récurrence et les relations  $x_0 = x_{n+1} = 0$  est du type :

$$\forall k \in \mathbb{N}, x_k = c_1 (e^{ik\alpha_j} - e^{-ik\alpha_j}) = 2ic_1 \sin(k\alpha_j).$$

Un vecteur propre de  $T$  attaché à la valeur propre  $\alpha_j = 2 \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$  est :

$$X_j = \begin{pmatrix} \sin \alpha_j \\ \sin 2\alpha_j \\ \vdots \\ \sin n\alpha_j \end{pmatrix}$$

obtenu avec  $c_1 = \frac{1}{2i}$  et  $a = \sin\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \neq 0$ .

$$(X_1, \dots, X_n) \text{ est une base de vecteurs propres de } T.$$

5. Valeurs propres de  $M$  :

(a) D'après la question II.2, les valeurs propres de  $M$  sont les valeurs

$$\lambda_j = -2 + \mu_j = -2 + 2 \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) = -4 \sin^2 \frac{j\pi}{2(n+1)},$$

pour  $1 \leq j \leq n$ .

Les sous-espaces propres associés sont ceux de la matrice  $T$ . Les  $E_{\lambda_j}$  sont tous de dimension 1.

(b)  $M$  est diagonalisable pour les mêmes raisons que  $T$ .

6. (a) Soit  $P$  une matrice qui diagonalise  $T$  et  $M$ . On peut prendre par exemple  $P$  de colonnes  $X_1, \dots, X_n$ , matrice des vecteurs propres dans la base canonique.

On a :  $M = PDP^{-1}$  avec  $D$  matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de  $M$ .

On peut écrire :  $H = 2I_n - rPDP^{-1} = P(2I_n - rD)P^{-1}$ .

La matrice  $2I_n - rD$  est diagonale,  $H$  est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont égales à

$$\beta_k = 2 + 4r \sin^2 \left( \frac{j\pi}{2(n+1)} \right) > 0, 1 \leq j \leq n.$$

- (b) Les valeurs propres de  $H$  sont toutes strictement positives.

0 n'est pas valeur propre et  $H$  est donc inversible.

- (c) i.  $W = H^{-1}K$  or  $H = P(2I_n - rD)P^{-1}$  et  $K = P(2I_n + rD)P^{-1}$  donc  $W = P\Delta P^{-1}$  avec

$$\Delta = (2I_n - rD)^{-1}(2I_n + rD).$$

Or comme  $2 - \lambda_j \neq 0$  pour tout  $1 \leq j \leq n$ , on a

$$\Delta = \text{Diag} \left( \frac{1}{2 - \lambda_1}, \dots, \frac{1}{2 - \lambda_n} \right) \text{Diag} (2 + \lambda_1, \dots, 2 + \lambda_n) = \text{Diag} \left( \frac{2 + \lambda_1}{2 - \lambda_1}, \dots, \frac{2 + \lambda_n}{2 - \lambda_n} \right)$$

donc  $W$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(W) = \left\{ \frac{2 - 4 \sin^2 \left( \frac{j\pi}{2(n+1)} \right)}{2 + 4 \sin^2 \left( \frac{j\pi}{2(n+1)} \right)}, 1 \leq j \leq n \right\}$ .

- ii. Pour tout  $j \in [1, n]$ ,  $\left| \frac{2 - 4 \sin^2 \frac{j\pi}{2(n+1)}}{2 + 4 \sin^2 \frac{j\pi}{2(n+1)}} \right| < 1$  donc  $\rho(W) < 1$ .

- iii. On a donc  $W = P\Delta P^{-1}$ , ainsi par récurrence immédiate,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $W^k = P\Delta^k P^{-1}$ , or  $\Delta^k$  est diagonale avec sur sa diagonale des suites géométriques dont la raison a un module strictement plus petit que 1 par la question précédente, donc la suite  $(\Delta^k)_k$  tend vers la matrice nulle.

De plus, l'application  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto PNP^{-1}$  est linéaire en dimension finie donc continue, ainsi

la suite  $(W^k)_k$  converge aussi vers la matrice nulle.