Correction Devoir surveillé IV - PSI

EXERCICE, E3A PSI 2002

1. On remarque que $\dfrac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs et le critère de Riemann, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ est convergente.

2. D'après la formule d'Euler, pour $x \neq 0[2\pi]$, $e^{ix} \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos kx &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{inx}}\right), \quad \text{car la raison n'est pas égale à 1}\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ix}\frac{e^{inx/2}(e^{-inx/2}-e^{inx/2})}{e^{ix/2}(-e^{ix/2}-e^{ix/2})}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i(n+1)x/2}\frac{-2i\sin(\frac{nx}{2})}{-2i\sin(\frac{x}{2})}\right)\\
&= \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}
\end{aligned}$$

Donc

$$D_n(x) = \frac{\sin(\frac{x}{2}) + 2\cos\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)\sin(\frac{nx}{2})}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

or $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b)$ donc $2\cos\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)\sin(\frac{nx}{2}) = \sin\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right) - \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$. On a donc

$$\boxed{\forall x \neq 0[2\pi], \quad D_n(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}}$$

3. (a) A l'aide d'une IPP, comme toutes les fonctions considérées sont de classe au moins $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\cos(kx)\,dx &= \left[x\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(kx)}{k}\,dx\\
&= 0 + \left[\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^\pi\\
&= \frac{(-1)^k - 1}{k^2}
\end{aligned}$$

   (b) Par linéarité de l'intégrale, on a

$$L_n = \int_0^\pi \frac{x}{2}\,dx + \sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi x\cos(kx)\,dx$$

Donc

$$\boxed{L_n = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k-1}{k^2}}$$

(c) On a donc les termes d'indices pairs étant nuls :

$$L_n = \frac{\pi^2}{4} - 2\sum_{p=0}^{E(\frac{n-1}{2})} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} L_n = \frac{\pi^2}{4} - 2V.}$$

4. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Comme $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$, on a un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = 2$.

   On a aussi pour $x \in]0,\pi]$,

$$f'(x) = \frac{\sin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\tan\frac{x}{2} - \frac{x}{2}}{\cos(\frac{x}{2})\sin^2(\frac{x}{2})} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{1}{3}(\frac{x}{2})^3}{1.(\frac{x}{2})^2} = \frac{x}{6}$$

   Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} f'(x) = 0$.

   f est continue sur $[0,\pi]$, $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et f' admet une limite en 0, donc d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, $\underline{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi] \text{ et } f'(0) = 0.}$

5. Les fonctions $x \mapsto \phi(x)$ et $x \mapsto -\dfrac{\cos(nx)}{n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, on peut donc effectuer l'intégration par parties suivante :

$$\int_0^\pi \phi(x)\sin(kx)\,dx = \frac{\phi(0)}{n} - \frac{\phi(\pi)\cos(n\pi)}{n} + \int_0^\pi \phi'(x)\frac{\cos(nx)}{n}\,dx$$

   or ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc ϕ et ϕ' sont bornées sur $[0,\pi]$, respectivement par M et M_1, on a donc

$$\begin{aligned} \left|\int_0^\pi \phi(x)\sin(kx)\,dx\right| &\leqslant \frac{2M}{n} + \int_0^\pi M_1\frac{1}{n}\,dx \\ &\leqslant \frac{2M}{n} + \frac{\pi M_1}{n} \end{aligned}$$

   Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \phi(x)\sin(nx)\,dx = 0}.$$

6. Pour $n \geqslant 1$, $L_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)\,dx$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, donc d'après la question précédente $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0.}$

7. On a alors d'après la question 3c), $\boxed{V = \dfrac{\pi^2}{8}}$

   Les deux séries $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{(2k)^2}$ et $\sum\limits_{k\geqslant 0}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$ convergent. On peut donc séparer S en les termes pairs et impairs :

$$S = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2}$$

   mais

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}S$$

   donc

$$\boxed{V = \frac{3}{4}S.}$$

   On obtient donc $\boxed{S = \dfrac{\pi^2}{6}}$.

Exercice II Extrait E3A, PSI

Question préliminaire

Soit $x \in [1,+\infty[$, fixé : $\forall t \in [1,+\infty[$, $h_x(t) = \dfrac{\ln t}{t^x}$, h_x est $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$.

Alors $\forall t \in [1,+\infty[$, $h'_x(t) = \dfrac{1 - x\ln t}{t^{x+1}}$ donc h_x est croissante sur $[1, e^{1/x}]$ et décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$.

1. Les séries de du type $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge, d'après les critères de Riemann, si et seulement si $\alpha > 1$. D'où le domaine de définition de F égale à $]1,+\infty[$.

   Remarque 1 *F n'est autre que la fonction ζ de Riemann.*
2. voir cours.
3. voir cours.
   a. On a : $\forall x \in [1,+\infty[$
   $$v'_n(x) = -\frac{\ln(n)}{n^x} + \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} = h_x(n+1) - h_x(n),$$
   avec $\forall t \in [1,+\infty[$, $h_x(t) = \dfrac{\ln t}{t^x}$.
   On déduit que pour $n \geqslant 3$, v'_n est négative.
   b. Soit $x \geqslant 1$. h_x décroît sur $[e^{1/x}, +\infty[$ et donc sur $[e,+\infty[$ (puisque $e^{1/x} \leqslant e$). On en déduit que v'_n est négative sur $[1,+\infty[$ pour $n \geqslant 3$.
   – Donc
   $$\forall n \geqslant 3,\ \forall x \geqslant 1,\ 0 \leqslant v_n(x) \leqslant v_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}.$$
   Donc v_n est bornée sur $[1,+\infty[$ et $||v_n||_{\infty,[1,+\infty[} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
4. Soit $n \geqslant 1$.
   a. Pour $x > 1$:
   $$w_n(x) = \frac{1}{n^x} - \left[-\frac{1}{(x-1)t^{x-1}}\right]_n^{n+1} = \frac{1}{n^x} + \frac{1}{(x-1)(n+1)^{x-1}} - \frac{1}{(x-1)n^{x-1}}.$$
   et
   $$w_n(1) = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n).$$
   b. w_n est continue sur $]1,+\infty[$ par les théorèmes généraux. Il reste à montrer que w_n est continue en 1.
   On va donc effectuer un développement limité au voisinage de $x = 1$ de
   $\dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(x-1)(n+1)^{x-1}} + \dfrac{1}{(x-1)n^{x-1}}$.
   Pour x au voisinage de 1 par valeur supérieure, $x - 1$ est au voisinage de zéro et
   $$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^{x-1}} &= \exp(-(x-1)\ln(n+1)) = 1 - (x-1)\ln(n+1) + o((x-1)^2)\\ \frac{1}{n^{x-1}} &= \exp(-(x-1)\ln(n)) = 1 - (x-1)\ln(n) + o((x-1)^2)\end{aligned}$$
   d'où
   $$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)(n+1)^{x-1}} - \frac{1}{(x-1)n^{x-1}} &= \frac{1}{(x-1)}\Big(\frac{1}{(n+1)^{x-1}} - \frac{1}{n^{x-1}}\Big)\\ &= \frac{1}{(x-1)}\Big((x-1)\big(-\ln(n+1) + \ln(n)\big) + o((x_1)^2)\Big)\\ &= \ln(n) - \ln(n+1) + o((x-1)).\end{aligned}$$
   Donc
   $$\lim_{x\to 1^+} w_n(x) = \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1) = w_n(1).$$
   Ainsi w_n est continue en 1 et elle est continue sur $]1,+\infty[$ par composée de fonctions continue, donc $\boxed{w_n \text{ est continue sur } [1,+\infty[.}$

c. Si $x \geqslant 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ décroît sur $[n, n+1]$ et on a donc

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall x \geqslant 1,\ \forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant w_n(x) \leqslant v_n(x).$$

d. Ainsi,

$$\forall x \geqslant 1,\ \forall n \geqslant 3,\ 0 \leqslant w_n(x) \leqslant v_n(1).$$

Donc w_n est bornée sur $[1, +\infty[$ $\|w_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Or la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$ est ACV par le critère de Riemann et le théorème de comparaison des séries à termes positifs $(\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2})$.

Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 3} w_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

e. la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 3} w_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$ donc uniformément sur $[1, +\infty[$, et $\forall n \geqslant 1$ w_n est continue sur $[1, +\infty[$ d'apèrs la question 5.b, donc W est bien définie sur $[1, +\infty[$ et continue sur $[1, +\infty[$ d'apèrs le thm de continuité des séries de fonctions.

5. Etude de W

a. Pour $x > 1$, par relation de Chasles, on a

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x}$$

L'intégrale se calcule immédiatement et, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\forall x > 1,\ W(x) = F(x) + \frac{1}{1-x}.$$

b. Par continuité de W en 1^+, on a donc

$$\lim_{x\to 1^+} \left(F(x) + \frac{1}{1-x} \right) = W(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \right)$$

c. On remarque enfin que, par téléscopage,

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N+1) = u_N - \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \underset{N\to+\infty}{\to} \gamma$$

et on conclut que

$$\lim_{x\to 1^+} \left(F(x) + \frac{1}{1-x} \right) = \gamma$$