Programme de colles n°2- Semaine du 19 au 24 septembre

Révisions d'algèbre linéaire

Toute l'algèbre linéaire de première année.

Algèbre linéaire : Compléments

- **Somme d'espaces vectoriels. Somme directe.**
  - La somme de sous-espaces vectoriels E_i de E est un sev de E. C'est le sev Vect $(\cup E_i)$.
  - Def : La somme est directe ssi $(\sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E \iff \forall i\, x_i = 0_E)$.
  - Exemple : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 1$ et $n = \deg(P) - 1$. Le sev $P\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.
  - Si E est de dimension finie alors : la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe ssi $\dim \sum_{i=1}^{p} E_i = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$.

    En particulier $\dim \oplus_{i=1}^{p} E_i = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$.
  - Bases adaptées à une somme directe et présentation du calcul matriciel par bloc.
  - Pour $E = \oplus_{i=1}^{p} E_i$, on définit les projecteurs associés à la somme directe. Les p_j définis ci-dessus sont des projecteurs, i.e. elles sont linéaires et ${p_j}^2 = p_j$. Elles vérifient de plus : $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si $i \neq j$ et $Id_E = \sum_{j=1}^{p} p_j$ et réciproquement.

- **Polynôme de Lagrange**
  - Les polynômes interpolateur de Lagrange sont définis par :

    $\forall k \in [|0, n|], \quad L_k(X) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$

    Ils sont associés à la famille de scalaires deux à deux distincts $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. Ils vérifient :
    - $\forall (i,k) \in [|0, n|]^2, \quad L_k(a_i) = \delta_i^k$,
    - $\forall k \in [|0, n|], \quad \deg(L_k) = n$,
    - $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_n)$ n scalaires deux à deux distincts. Pour tout $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(a_i) = \lambda_i$ pour $i = 0 \ldots n$. De plus P vérifie $P(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(X)$.

- **Dualité**
  - Définition de E^*. E^* est un $\mathbb{K}$-ev
  - Les formes linéaires coordonnées dans un ev de dimension finie forment une base de E^*. Ainsi $\dim E^* = \dim E$.
  - Exemples sur $\mathbb{R}^3$, Interpolation de Lagrange.
  - Base préduale. Exemple : les formes linéaires valuations sur $\mathbb{R}_n[X]$.

- **Hyperplan :**
  - Définition : Tout espace qui admet un supplémentaire de dimension 1.
  - Caractérisation à l'aide du noyau d'une forme linéaire.
  - Soit e un vecteur de E, de dimension finie, e non nul alors il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(e) = 1$.
  - Recherche de base d'hyperplan.

- **Trace** d'une matrice
  - $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ et définition de la trace d'un endomorphisme.
  - Pour un projecteur en dimension finie, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.