Programme de colles n°12- Semaine du 12 au 16 décembre

Suites et séries de fonctions.

- ► Définition de la convergence simple d'une suite ou d'une série de fonctions.
- Convergence uniforme d'une suite ou d'une série de fonctions.
  ► **Thm** La convergence uniforme implique la convergence simple.
  ► **Thm** Critère de convergence uniforme à l'aide des restes, pour les séries de fonctions. (sans démo)
- ► Convergence normale d'une série de fonctions
  ► **Thm** La convergence normale implique la convergence uniforme.
- Propriétés de la limite d'une suite ou d'une séries de fonctions :
  - ► Continuité de la limite d'une suite de fonctions (ou d'une série de fonctions) continues lorsqu'il y a convergence uniforme (admis).
  - ► Thm de la double limite. (ADMIS)
  - ► Intégrabilité sur un segment (Intervertion lim et $\displaystyle\int$) pour les suites et séries de fonctions, avec démonstration dans le cas des suites de fonctions.
  - ► Thm de dérivabilité sur un intervalle (généralisation aux fonctions de classe $\mathbb{C}^k$) pour les suites et séries de fonctions. (Admis)

  Tous les énoncés de ces théorèmes doivent être parfaitement su!!
- Etude de la fonction ζ de Riemann.
  ► ζ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$
  ► $\lim\limits_{+\infty} \zeta = 0$.
- Approximations des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escaliers.
  Thm : Toute fonction $f \in \mathcal{C}M([a,b],\mathbb{K})$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suites de fonctions en escalier. (Admis)
  Théorème d'approximation de Weiertrass : Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes. (Admis)

Intégrales impropres

- Définition de $\int_{[a,b[} f(t)\,dt$ convergente, de $\int_{]a,b]} f(t)\,dt$ convergente et $\int_{]a,b[} f(t)\,dt$ convergente.

  ► **Thm** Si f est CPM sur $[a,b[$ et prolongebale par continuité en b alors $\int_{[a,b[} f(t)\,dt$ est convergente. (Démon non exigible).
- Propriétés : linéarité, positivité, croissance.

Intégrale absolument convergente

- Définition.
- Propriétés : linéarité, positivité, croissance.
- Définition d'intégrale semi-convergente.

  ► $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semi-convergente avec démonstration.

Intégrale des fonctions positives

- Théorème de comparaison.
- Théorème des équivalents.
- ► Exemple fondamentaux : critère de Riemann en $+\infty$ et en 0, fonction exponentielle, fonction ln sur $]0,1]$. Toutes ces exemples sont à connaitre ainsi que les démonstrations !
- ► Introduction à la fonction gamma avec recherche de son domaine de définition $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

Propriétés

Linéarité,

Inégalité de la moyenne,

Relation de Chasles,

Changement de variables bijectif.

Les démonstrations ne sont pas exigibles.

Rappel Théorème de comparaison série et intégrale.

► Application aux séries de Riemann et aux séries de Bertrand.

Pour les séries de Bertrand, vous devez savoir redémontrer les résultats car elles ne sont pas au programme.

Espaces vectoriels normés des fonctions intégrales.

► Construction de la norme 1 sur $L^1(I)$.