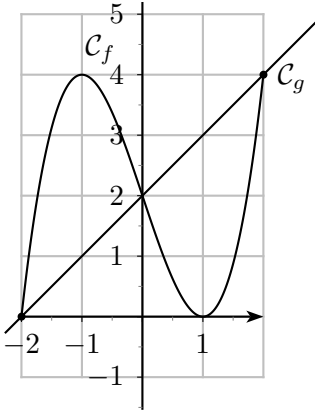


Durée 2 heures

Calculatrice interdite.

Exercice 1 : (10 points)On a représenté ci-dessous les fonctions f et g définies par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et $g(x) = x + 2$.

- I**
1. Donner l'ensemble de définition de f .
 2. Donner l'image de 1 puis de 2 par f .
 3. Quels sont les antécédents par f de 4 et -1 ?
 4. Résoudre graphiquement :
 - (a) $f(x) = 0$
 - (b) $f(x) < 0$
 - (c) $f(x) = g(x)$
 - (d) $f(x) \geq g(x)$
- II**
1. Calculer l'image de -2 par f .
 2. Par le calcul, déterminer les antécédents de 2 par f .

Exercice 2 : (3 points)Soit f la fonction définie pour tout réel x non nul par $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$.

1. Calculer les images par f de -1 et 2.
2. $\frac{2}{3}$ est-il un antécédent de $-\frac{19}{18}$? Justifier.

Exercice 3 : (2 points)Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = -2x^2 + 4x + 30$.Le point $A(3 - 2\sqrt{3}; -16\sqrt{3})$ appartient-il à \mathcal{C}_g ? Justifier.

Exercice 4 : (5 points)

Soit h la fonction définie pour tout réel x par $h(x) = 1 - (2 - 3x)^2$.

1. Développer $h(x)$.
2. Factoriser $h(x)$.
3. Résoudre l'équation $h(x) = 0$.
4. Résoudre l'équation $h(x) = 4$.

Exercice 5 : (8 points)

Dans un repère orthonormé (O, I, J) on donne les points $A(2; 2)$, $B(-2; 6)$ et $C(-10; 0)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en B .
2. Soit Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC . Calculer les coordonnées du point Ω .
3. Soit G le centre de gravité du triangle ABC . Calculer BG .

Exercice 6 : (8 points)

Dans un repère (O, I, J) , on donne les points $A(-3; 6)$, $B(5; 4)$, $C(1; -2)$ et $D(-3; -2)$.

1. Faire une figure.
2. Calculer les coordonnées des milieux M, N, P et Q respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.
3. Déterminer la nature du quadrilatère $MNPQ$.

Exercice 7 : (4 points)

Dans un repère orthonormé (O, I, J) on donne les point $B(0; 5)$.

$M(x; y)$ est un point du cercle de centre B et de rayon 5.

1. Calculer BM en fonction de x et y .
2. L'égalité $BM = 5$ implique que $BM^2 = 25$.
En déduire que $x^2 + y^2 - 10y = 0$.
3. Quelles sont les coordonnées des points d'ordonnée 8 qui appartiennent au cercle ?

Correction.

Exercice 1 :

- I
1. L'ensemble de définition de la fonction f est $[-2; 2]$ / 1
 2. $f(1) = 0$ donc l'image de 1 par f est 0. ... / 0,5
 $f(2) = 4$ donc l'image de 2 par f est 4. ... / 0,5
 3. Pour trouver les antécédents de 4 par f on résout $f(x) = 4$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-1; 2\}$ / 0,5
Pour trouver les antécédents de -1 , on résout $f(x) = -1$ et on constate qu'il n'y a pas de solution.
 -1 n'a donc pas d'antécédent par f / 0,5
 4. (a) $f(x) = 0$, on trouve $\mathcal{S} = \{-2; 1\}$ / 1
(b) $f(x) < 0$, il n'y a pas de solution la fonction étant toujours positive. ... / 1
(c) $f(x) = g(x)$, ce sont les abscisses des points d'intersection donc $\mathcal{S} = \{-2; 0; 2\}$.
... / 1
(d) $f(x) \geq g(x)$, ce sont les abscisses pour lesquelles \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g donc
 $\mathcal{S} = [-2; 0] \cup \{2\}$ / 1
- II
1. $f(-2) = (-2)^3 - 3 \times (-2) + 2 = -8 + 6 + 2 = 0$ / 1
 2. On résout $f(x) = 2$ ce qui équivaut à :

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

ce qui équivaut à :

$$x^3 - 3x = 0$$

ou encore :

$$x(x^2 - 3) = 0$$

C'est-à-dire :

$$x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul donc :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x - \sqrt{3} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \sqrt{3} = 0$$

Donc $\mathcal{S} = \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$ / 2

Exercice 2 :

1. $f(-1) = (-1)^2 - \frac{1}{-1} = 1 - (-1) = 2$ / 1
 $f(2) = 2^2 - \frac{1}{2} = 4 - 0,5 = 3,5 = \frac{7}{2}$ / 1
2. $f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9} - \frac{3}{2} = \frac{8}{18} - \frac{27}{18} = -\frac{19}{18}$.
 $\frac{2}{3}$ est donc bien un antécédent de $-\frac{19}{18}$ par f / 1

Exercice 3 :

... /2

$$g(3 - 2\sqrt{3}) = -2 \times (3 - 2\sqrt{3})^2 + 4 \times (3 - 2\sqrt{3}) + 30 = -2(9 - 12\sqrt{3} + 4 \times 3) + 12 - 8\sqrt{3} + 30 = -18 + 24\sqrt{3} - 24 + 12 - 8\sqrt{3} + 30 = 16\sqrt{3} \neq -16\sqrt{3}. \quad \dots /1,5$$

Les coordonnées du point A ne sont pas $(3 - 2\sqrt{3}; g(3 - 2\sqrt{3}))$ donc A n'appartient pas à C_g .

... /0,5

Exercice 4 :

... /5

1. $h(x) = 1 - (2 - 3x)^2 = 1 - (4 - 12x + 9x^2) = 1 - 4 + 12x - 9x^2 = -9x^2 + 12x - 3. \quad \dots /1$

2. $h(x) = 1^2 - (2 - 3x)^2 = (1 - (2 - 3x))(1 + (2 - 3x)) = (-1 + 3x)(3 - 3x) = 3(1 - x)(3x - 1); \quad \dots /1$

3. $h(x) = 0$ si et seulement si

$$(-1 + 3x)(3 - 3x) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul donc :

$$-1 + 3x = 0 \quad \text{ou} \quad 3 - 3x = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = 1$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{3}; 1 \right\}$$

... /1

4. $h(x) = 4$ équivaut à $1 - (2 - 3x)^2 = 4$ ou encore $(2 - 3x)^2 = -3.$

Un carré ne peut pas être négatif donc il n'y a pas de solution à cette équation, $\mathcal{S} = \emptyset. \quad \dots /2$

Exercice 5 :

... /8

1. D'après les propriétés du cours :

$$AB^2 = (-2 - 1)^2 + (6 - 2)^2 = (-3)^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25. \quad \dots /1$$

$$AC^2 = (-10 - 1)^2 + (0 - 2)^2 = (-11)^2 + (-2)^2 = 121 + 4 = 125. \quad \dots /1$$

$$BC^2 = (-10 - (-2))^2 + (0 - 6)^2 = (-8)^2 + (-6)^2 = 64 + 36 = 100. \quad \dots /1$$

On constate que $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en $B.$... /1,25

2. On sait que, dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse. ... /0,75

Ω est donc le milieu du segment $[AC]$, il a donc pour coordonnées :

$$\left(\frac{1 + (-10)}{2}; \frac{2 + 0}{2} \right)$$

$$\Omega \left(\frac{9}{2}; 1 \right).$$

... /1

3. On sait que le centre de gravité d'un triangle se situe au deux tiers (en partant du sommet) de chaque segment médian. $[B\Omega]$ est un segment médian donc $BG = \frac{2}{3}B\Omega. \quad \dots /0,75$

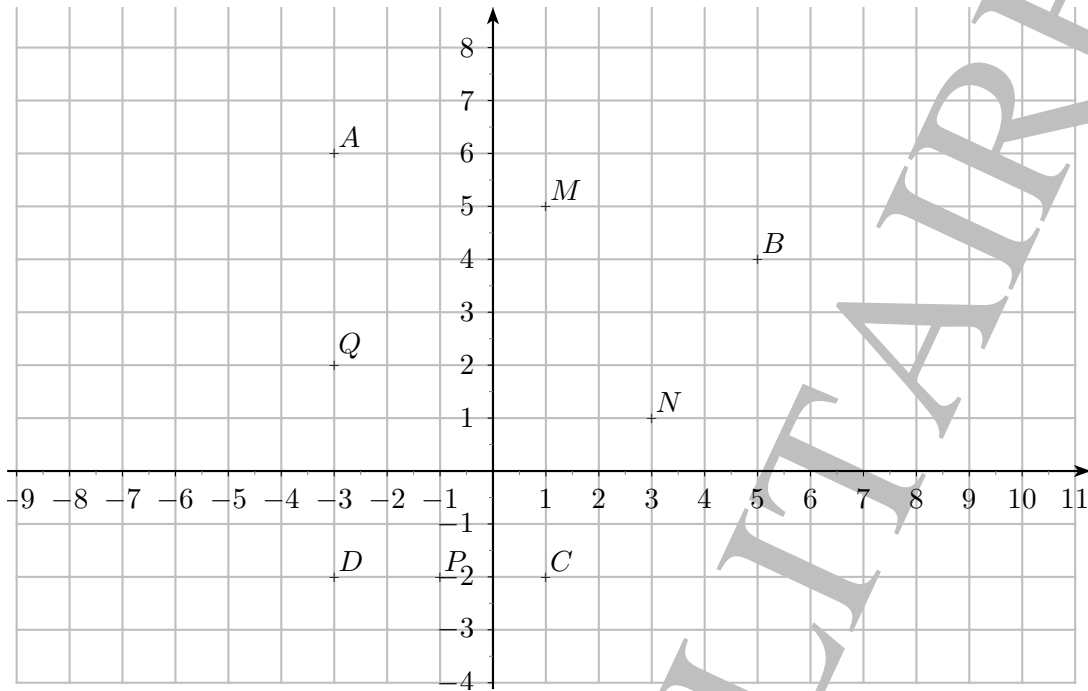
$$\text{Or, } B\Omega = \sqrt{\left(-\frac{9}{2} - (-2)\right)^2 + (1 - 6)^2} = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + (-5)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 25} = 5\sqrt{\frac{1}{4} + 1} = 5\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}. \quad \dots /1$$

$$\text{Ainsi, } BG = \frac{2}{3} \times \frac{5}{2}\sqrt{5} = \frac{5}{3}\sqrt{5}. \quad \dots /0,25$$

Exercice 6 :

... /8

1. On a la figure :



/1

2. Coordonnées de M : $\left(\frac{-3+5}{2}; \frac{6+4}{2}\right)$ donc $M(1; 5)$ /1

Coordonnées de N : $\left(\frac{5+1}{2}; \frac{4+(-2)}{2}\right)$ donc $N(3; 1)$ /1

Coordonnées de P : $\left(\frac{1+(-3)}{2}; \frac{-2+(-2)}{2}\right)$ donc $P(-1; -2)$ /1

Coordonnées de Q : $\left(\frac{-3+(-3)}{2}; \frac{6+(-2)}{2}\right)$ donc $Q(-3; 2)$ /1

3. Coordonnées du milieu de $[MP]$: $\left(\frac{1+(-1)}{2}; \frac{5+(-2)}{2}\right)$, c'est-à-dire $(0; 1, 5)$ /1

Coordonnées du milieu de $[NQ]$: $\left(\frac{3+(-3)}{2}; \frac{1+2}{2}\right)$, c'est-à-dire $(0; 1, 5)$ /1

Les deux diagonales $[MP]$ et $[NQ]$ du quadrilatère $MNPQ$ ont le même milieu donc $MNPQ$ est parallélogramme. ... /1

$MN = \sqrt{(3-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ et

$QM = \sqrt{(1-(-3))^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

$MN \neq QM$, ce n'est donc pas un losange.

$MP = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{2+49} = \sqrt{51}$ et

$QN = \sqrt{(3-(-3))^2 + (1-2)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$.

$MP \neq QN$ ce n'est pas non plus un rectangle.

$MNPQ$ est donc un parallélogramme.

Exercice 7 :

... /4

1. $BM = \sqrt{(x-0)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25}$ /1

2. Si M appartient au cercle de centre B et de rayon 5 alors $BM = 5$ et donc $BM^2 = 25$.
Or, $BM^2 = x^2 + y^2 - 10y + 25$ donc $BM^2 = 25$ équivaut à :

$$x^2 + y^2 - 10y + 25 = 25$$

C'est-à-dire : $x^2 + y^2 - 10y = 0$ /0,5

3. Dans l'équation ci-dessus, lorsqu'on remplace y par 8, on obtient : ... /0,25

$$x^2 + 64 - 80 = 0$$

Ce qui équivaut à :

$$x^2 - 16 = 0$$

... /0,25 Ou encore :

$$(x - 4)(x + 4) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul donc :

$$x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 4 = 0$$

$$x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -4$$

... /1,5 Il s'agit donc des points de coordonnées $(4; 8)$ et $(-4; 8)$ /0,5