

# Le logarithme népérien.

## Introduction :

Puisque la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $]0; +\infty[$ , on sait que pour tout  $y > 0$ , l'équation  $e^x = y$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$ .

On note cette solution  $\ln y$  et on l'appelle *logarithme népérien* de  $y$ .

## 1 Définition, premières propriétés :

### 1.1 Définition :

On appelle *logarithme népérien* la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  qui à tout  $x > 0$  associe le réel  $\ln x$  tel que :

$$\exp(\ln x) = x.$$

### 1.2 Conséquences :

- Pour tout réel  $x > 0$  et tout réel  $y$ ,  $x = e^y$  équivaut à  $y = \ln x$ .
- Pour tout réel  $x > 0$ ,  $e^{\ln x} = x$ .
- Pour tout réel  $x$ ,  $\ln e^x = x$ .

### Preuve :

Les deux premières conséquences découlent de la définition. Pour la troisième, on compare  $e^{\ln e^x}$  et  $e^x$ . Or, d'après la définition du logarithme népérien,  $e^{\ln e^x} = e^x$  et d'après les propriétés de l'exponentielle, on en déduit que :

$$\ln e^x = x.$$

### Cas particuliers :

$$\ln e = \ln e^1 = 1 \text{ et } \ln 1 = \ln e^0 = 0.$$

### 1.3 Propriété :

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

### Preuve :

Soient  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs tels que  $0 < x < y$ .

Alors, d'après la propriété précédente :  $x = e^{\ln x}$  et  $y = e^{\ln y}$ . Or, d'après les propriétés de l'exponentielle :

Si  $e^{\ln x} < e^{\ln y}$  alors  $\ln x < \ln y$ .

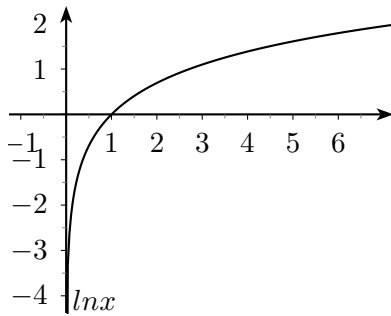
On conclut ainsi que la fonction logarithme népérien est strictement croissant sur  $]0; +\infty[$

### 1.4 Représentation graphique :

#### 1.4.1 Propriété :

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .

### 1.4.2 Représentation graphique :



## 2 Propriétés algébriques :

### 2.1 Théorème : Relation fonctionnelle

Pour tous les réels  $a$  et  $b$  strictement positifs :

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

#### Preuve :

On compare  $e^{\ln ab}$  et  $e^{\ln a + \ln b}$  :

Par définition,  $e^{\ln ab} = ab$ .

D'après la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle,  $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b}$  et donc, par définition :

$$e^{\ln a + \ln b} = ab.$$

On a donc :  $e^{\ln ab} = ab = e^{\ln a + \ln b}$  et, d'après les propriétés de la fonction exponentielle, on en déduit que :  $\ln ab = \ln a + \ln b$ .

### 2.2 Propriétés :

Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs et  $n$  un entier relatif. Alors :

$$- \ln \frac{1}{a} = -\ln a ;$$

$$- \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b ;$$

$$- \ln a^n = n \ln a ;$$

$$- \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a.$$

#### Preuve :

$\ln 1 = 0 = \ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln a + \ln \frac{1}{a}$  d'après la propriété précédente. On conclut alors que :

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a.$$

Par suite,  $\ln \frac{a}{b} = \ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$ .

Par une récurrence immédiate sur la relation fonctionnelle, on déduit que pour  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $\ln a^n = n \ln a$  puis que, si  $n$  est un entier négatif :

$\ln a^n = \ln \frac{1}{a^{-n}}$  avec  $-n \in \mathbb{N}$  donc :  $\ln a^n = \ln \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = -n \ln \frac{1}{a} = -n(-\ln a) = n \ln a$ .

Enfin, comme  $a > 0$ , on sait que :  $a = \sqrt{a^2}$  donc :  $\ln a = \ln \sqrt{a^2} = 2 \ln \sqrt{a}$  d'où :  $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$ .

### 2.3 Définition : Logarithme décimal

On appelle *logarithme décimal* la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

### 2.4 Propriétés :

- Pour tous les réels  $a$  et  $b$  tels que  $a > 0$  et  $b > 0$ , on a :

$$\log ab = \log a + \log b$$

- La fonction logarithme décimal conserve les propriétés de la fonction logarithme népérien.

- Pour tout entier relatif  $n$ ,  $\log 10^n = n$ .

**Preuve :**

*En exercice.*

## 3 Etude de la fonction logarithme :

### 3.1 Propriétés : Limites

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .

**Preuve :**

Soit  $A > 0$  un nombre réel. On veut prouver qu'il existe un réel  $B$  tel que pour tout  $x > B$ ,  $\ln x > A$ .

On pose  $B = e^A > 0$ , comme la fonction logarithme est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ , on a :

Pour tout  $x > B$ ,  $\ln x > \ln B$ . Ou encore,

$\ln x > \ln e^A$  c'est-à-dire :  $\ln x > A$ . On a ainsi prouvé que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ .

Par ailleurs, en posant  $X = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln X = -\infty$ .

### 3.2 Propriété : Continuité et dérivabilité

La fonction logarithme népérien est dérivable (donc continue) sur  $]0; +\infty[$  et a pour fonction dérivée

$: x \mapsto \frac{1}{x}$ .

**Preuve :**

Soit  $A > 0$ , on veut étudier la limite (lorsque  $X$  tend vers  $A$ ) du quotient :  $\frac{\ln X - \ln A}{X - A}$ .

Pour cela, on définit les réels  $x$  et  $a$  tels que :  $X = e^x$  et  $A = e^a$ . On sait alors, puisque la fonction exponentielle est continue, que si  $x$  tend vers  $a$  alors  $X$  tend vers  $A$ . On a de plus,

$\frac{\ln X - \ln A}{X - A} = \frac{\ln e^x - \ln e^a}{e^x - e^a} = \frac{x - a}{e^x - e^a}$ . Mais alors,

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{e^x - e^a} = \frac{1}{e^a} = \frac{1}{A}$  d'après la dérivée de la fonction exponentielle. On conclut que le nombre dérivé de la fonction logarithme népérien en  $A$  est  $\frac{1}{A}$ . On généralise à tout  $x > 0$ .

### 3.3 Propriété :

Pour tout réel  $h$  proche de 0, on peut approcher le nombre  $\ln(1 + h)$  par la valeur  $h$  :

$$\ln(1 + h) \approx h$$

**Preuve :**

On sait que pour toute fonction dérivable sur  $I$  et  $a \in I$ ,  $f(a + h) \approx f'(a)h + f(a)$ . Donc, pour  $f(x) = \ln x$  et  $a = 1$ , on obtient :

$$\ln(1 + h) \approx 1 \times h + 0 = h.$$

**Conséquence :**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = 1.$$