

Devoir Programmé n^o 1(2h)

Calculatrice autorisée.

La qualité de la présentation et de la rédaction comptera dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1 : Restitution organisée de connaissances

(4 points)

On supposera connus les résultats suivants :

★ $e^0 = 1$.

★ Pour tous réels x et y , $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x , $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n , $(e^x)^n = e^{nx}$.

Exercice 2 :

(6 points)

On considère la fonction f définie sur $] -\infty; 6[$ par : $f(x) = \frac{9}{6-x}$.

On définit, pour tout entier naturel n , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Calculer les termes u_1, u_2, u_3, u_4 de cette suite. Quelle conjecture peut-on formuler quant au sens de variation de cette suite ?

2. (a) Démontrer que si $x < 3$ alors $\frac{9}{6-x} < 3$.

En déduire que $u_n < 3$ pour tout entier naturel n .

(b) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

(b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 3 :**(10 points)**

On désigne par f une fonction dérivable sur \mathbb{R} et par f' sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour tout nombre réel x , $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$,

(2) $f'(0) = 1$,

(3) la fonction f' est dérivable sur \mathbb{R} .

1. (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) \neq 0$.

(b) Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

(4) pour tout nombre réel x , $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f .

3. On pose : $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

(a) Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

(b) Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

(c) En déduire la fonction u .

(d) On admet que $v : x \mapsto e^{-x}$.

En déduire que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

4. (a) Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

(b) Dresser tableau de variation de la fonction f .

5. (a) Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α dans \mathbb{R} .

(b) Déterminer un encadrement, d'amplitude 10^{-2} , de cette solution lorsque $m = 3$.

Correction

Exercice 1 :

1. D'après les propriétés énoncées, $1 = e^0 = e^{x-x} = e^x \times e^{-x}$.

Un produit étant nul si et seulement si un de ses facteurs est nul, on en déduit que $e^x \neq 0$ et donc, en divisant par ce nombre :

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

2. Soit x un réel.

On raisonne par récurrence en désignant, pour tout entier naturel n , par \mathcal{P}_n la proposition : $(e^x)^n = e^{nx}$.

Initialisation : pour $n = 0$

$$(e^x)^0 = 1 \text{ et } e^{0x} = e^0 = 1.$$

\mathcal{P}_0 est donc vraie.

Hérédité : On suppose \mathcal{P}_n vraie pour un entier naturel n quelconque. Alors,

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

donc

$$(e^x)^{n+1} = e^{nx} \times e^x = e^{nx+x} = e^{(n+1)x}$$

\mathcal{P}_{n+1} est alors également vraie.

Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel n , $(e^x)^n = e^{nx}$. Et ceci est vrai pour tout réel x .

Exercice 2 :

1. $u_1 = 1, u_2 = \frac{9}{5}, u_3 = \frac{15}{7}, u_4 = \frac{7}{3}$.

$u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$, la suite (u_n) semble donc croissante.

2. (a) Si $x < 3$ alors $-x > -3$ et donc $6 - x > 3$. La fonction inverse étant décroissante sur $]0; +\infty[$, on en déduit que :

$$\frac{1}{6-x} < \frac{1}{3} \text{ et donc, en multipliant par } 9 > 0, \frac{9}{6-x} < 3.$$

Pour démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n < 3$, on raisonne par récurrence en désignant par \mathcal{P}_n la proposition : $u_n < 3$.

Initialisation : pour $n = 0$

$$u_0 = -3 < 3 \text{ donc } \mathcal{P}_0 \text{ est vraie.}$$

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel n quelconque \mathcal{P}_n est vraie c'est-à-dire que $u_n < 3$.

$$\text{On sait alors que : } \frac{9}{6-u_n} < 3 \text{ ou encore } u_{n+1} < 3.$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est alors vraie.

Ainsi, par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel n , $u_n < 3$.

- (b) Pour déterminer le sens de variation de (u_n) , on étudie le signe de la différence entre deux termes consécutifs de la suite :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{9}{6 - u_n} - u_n = \frac{9 - u_n(6 - u_n)}{6 - u_n} = \frac{9 - 6u_n + u_n^2}{6 - u_n} = \frac{(3 - u_n)^2}{6 - u_n}.$$

Comme pour tout entier naturel n , $u_n < 3$, on a $3 - u_n > 0$ et donc $(3 - u_n)^2 > 0$; de même que $6 - u_n$. Ainsi,

$u_{n+1} - u_n > 0$ ce qui permet de conclure à la stricte croissance de la suite (u_n) .

$$3. \quad (a) \quad v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - u_n} - 3} = \frac{1}{\frac{9 - 18 + 3u_n}{6 - u_n}} = \frac{6 - u_n}{-9 + 3u_n}.$$

$$\text{Alors, } v_{n+1} - v_n = \frac{6 - u_n}{3(u_n - 3)} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{6 - u_n - 3}{3(u_n - 3)} = \frac{-1(u_n - 3)}{3(u_n - 3)} = -\frac{1}{3}.$$

(v_n) est donc bien une suite de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 3} = -\frac{1}{6}$.

$$(b) \quad \text{On en déduit alors que pour tout entier naturel } n, v_n = -\frac{1}{6} - \frac{n}{3} = -\frac{2n + 1}{6}.$$

Par ailleurs, pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ donc

$$u_n = \frac{1}{v_n} + 3 = \frac{-6}{2n + 1} + 3 = \frac{-3 + 6n}{2n + 1}$$

Exercice 3 :

1. (a) S'il existait un réel a tel que $f'(a) = 0$ alors, d'après la propriété (1), on aurait :

$$[f'(a)]^2 - [f(a)]^2 = -[f(a)]^2 = 1$$

ce qui est impossible, un carré étant toujours positif.

On en déduit donc que $f'(x) \neq 0$ pour tout réel x .

(b) $f'(0) = 1$ donc : $[f'(0)]^2 - [f(0)]^2 = 1 - [f(0)]^2 = 1$ donc $f(0) = 0$.

2. Soit $g : x \mapsto [f'(x)]^2 - [f(x)]^2$. g est dérivable sur \mathbb{R} comme différence et produit de fonctions dérivables.

De plus, on sait que g est constante et égale à 1. Donc, pour tout x réel :

$$g'(x) = 0 = 2f'(x)f''(x) - 2f'(x)f(x) = 2f'(x)(f''(x) - f(x))$$

Un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul, on pour tout x réel $f'(x) \neq 0$ et 2 est différent de 0 donc, pour tout x réel :

$$f''(x) - f(x) = 0$$

ou encore, $f''(x) = f(x)$.

3. (a) On sait que $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$ donc :

$$u(0) = f'(0) + f(0) = 1$$

et

$$v(0) = f'(0) - f(0) = 1$$

- (b) u est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables et
 $u' = f'' + f' = f + f' = u$.
 De même, v est dérivable sur \mathbb{R} comme différence de fonctions dérivables et
 $v' = f'' - f' = f - f' = -(f' - f) = -v$.
- (c) u est la fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $u' = u$ et $u(0) = 1$, il s'agit donc de la fonction exponentielle.
- (d) $u = f' + f$ et $v = f' - f$ donc $u - v = f' + f - f' + f = 2f$ donc, pour tout x réel,

$$f(x) = \frac{u(x) - v(x)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

4. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.
 Par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$.

Par différence,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- (b) f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme et composition de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et pour tout x réel :

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Or, $e^x > 0$ pour tout réel x et donc, $f'(x) > 0$ pour tout réel x . Ainsi, on obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$+\infty$

↗

5. (a) f est continue strictement croissante sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions monotones, pour tout réel m , l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans \mathbb{R} .
- (b) A l'aide de la calculatrice, on trouve : $1,81 < x < 1,82$