La fonction exponentielle

Exercice 1 :

L'objectif de cet exercice est d'étudier la limite de $\dfrac{e^x}{x}$ *en* $+\infty$.

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

1. Justifier que f est dérivable et déterminer sa dérivée f'.
2. Justifier que f' est dérivable et déterminer sa dérivée f'' (*dérivée seconde de* f).
3. Etudier le signe de $f''(x)$ pour $x \in [0;+\infty[$.
   En déduire les variations de f' sur $[0;+\infty[$ puis le signe de $f'(x)$ sur cet intervalle.
4. Etablir le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$ puis en déduire que $e^x \geq \dfrac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.
5. Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
6. En utilisant le changement de variable $-X = x$, étudier la limite $\lim\limits_{x \to -\infty} x \times e^x$.

Exercice 2:

u est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \dfrac{e^{n+1}}{e^{2n}}$.
Démontrer que u est décroissante.

Exercice 3 :

Etudier dans chaque cas la limite de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
a) $f(x) = e^{-x}$; b) $f(x) = e^x + e^{-x}$ c) $f(x) = e^{2x} + e^x + 1$.

Exercice 4 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + e^x$.

1. **a)** Etudier les variations de f.
   b) Etudier la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
   d) Construire la courbe représentative de f dans un repère.
2. **a)** Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.
   b) Donner une valeur approchée de cette solution arrondie au centième.

Exercice 5 :

En utilisant l'approximation affine de e^h, pour h proche de 0, associée à la fonction exponentielle, donner une valeur approchée de chacun des nombres suivants :
a) $e^{0,01}$ b) $\dfrac{1}{e^{0,01}}$ c) $\dfrac{e^{1,98}}{e^2}$

Exercice 6 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+x}$.

a) Etudier les variatios de f.

b) Etudier la limite de f enn $-\infty$ et en $+\infty$.

c) tracer, dans un repère, la courbe représetative de f.

Exercice 7 :

n désigne un entier naturel non nul.
On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^2}$ et $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Dresser le tableau de variation de f_n.

2. **a)** Montrer que la dérivée *seconde* (c'est-à-dire la dérivée de la dérivée) de f_n s'annule pour deux valeurs opposées a_n et b_n.

   b) on note A_n et B_n les points de $\mathcal{C}_n$ d'abscisses respectives a_n et b_n. Démontrer que, lorsque n varie dans $\mathbb{N} - \{0\}$, les points A_n et B_n restent sur une même droite.

   c) Démontrer que, lorsque n varie dans $\mathbb{N} - \{0\}$, les tangentes en A_n et B_n à la courbe $\mathcal{C}_n$ passent par un point fixe.
   Préciser les coordonnées de ce point.

3. Tracer les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$. Place les points A_1, B_1, A_3 et B_3 et les tangentes respectives.